Funkcja kwadratowa

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , x \in \mathbb{R}$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ — pewne stałe, przy czym $a \neq 0$.

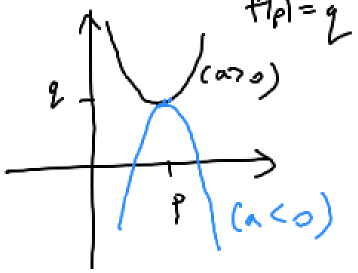
Wykresem jest parabola.

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

postać kanoniczna:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

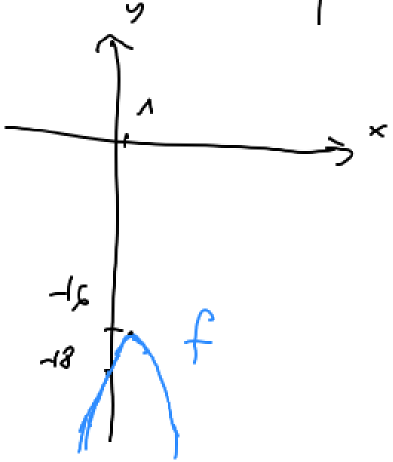
$f(p) = q$



Np.: $f(x) = -2x^2 + 4x - 18 = -2(x^2 - 2x + 9) =$

$$= -2(\underbrace{(x-1)^2}_{x^2-2x+1} - 1 + 9) = -2((x-1)^2 + 8) =$$

$$= -2(x-1)^2 - 16$$



$$f(x) = 3x^2 + 5x + 7 = 3\left(\underbrace{x^2 + \frac{5}{3}x} + \frac{7}{3}\right) =$$

$$(x+a)^2 = \underbrace{x^2 + 2ax} + a^2$$

$a = 5/6$

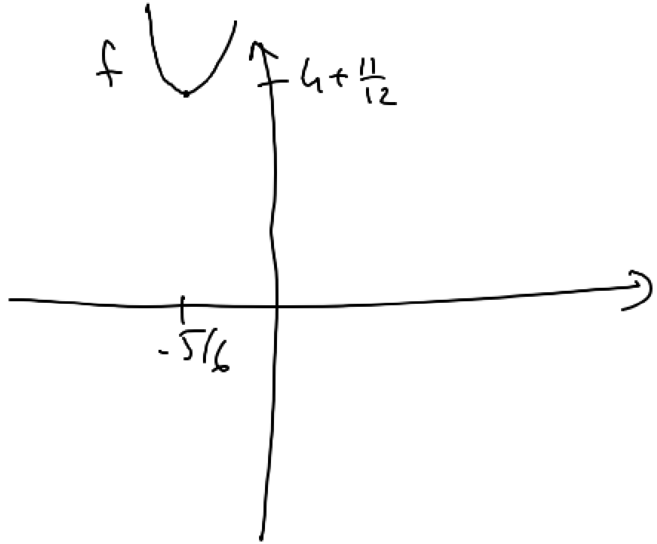
$$= 3\left(\underbrace{\left(x+\frac{5}{6}\right)^2} - \frac{25}{36} + \frac{7}{3}\right) = 3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{25}{12} + 7 =$$

$$x^2 + 2\cdot\frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{5}{3}x} + \frac{25}{36}$$

$$= 3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 + \left(4 + \frac{11}{12}\right)$$



Spr.

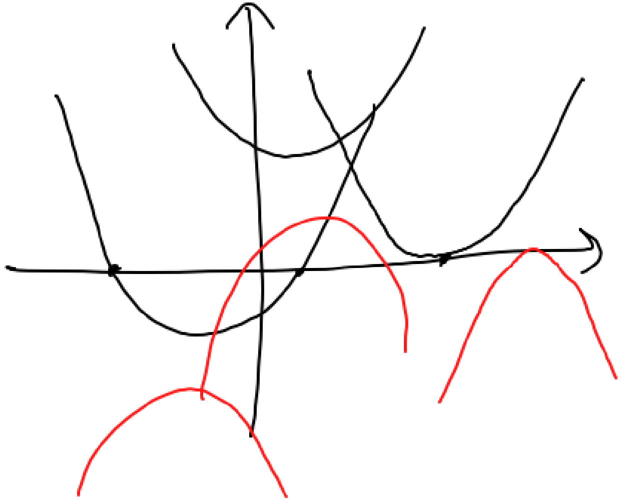
$$3\left(x+\frac{5}{6}\right)^2 + \left(4 + \frac{11}{12}\right) =$$

$$= 3\left(x^2 + 2\cdot\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right) + 4 + \frac{11}{12} = \dots$$

Miejsca zerowe:

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$



- jeśli $\Delta=0$, to mamy jeden pierwiastek podwójny

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeśli $\Delta>0$, to mamy dwa różne pierwiastki rzeczywiste

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \vee x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- jeśli $\Delta<0$, to nie ma pierwiastków rzeczywistych

Funkcja wielomianowa.

Niech $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Funkcję

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}_{} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ten napis może sugerować, że są co najmniej 3 składniki, ale tak nie musi być

nazywamy <u>funkcją wielomianową</u> stopnia n. W skrócie będziemy nazywali tę funkcję <u>wielomianem</u>.

<u>Uwaga:</u> przyjmujemy $x^0 = 1$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ (również dla $x = 0$).

<u>Np.</u> $n=3$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $a_3 = \frac{1}{2}$

$$f(x) = 1 - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3$$

<u>Np.</u> $n = 0$, $a_0 = 4$

$$f(x) = 4$$

Dodatkowo funkcję stałą równą zero: $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, też nazywamy wielomianem. Czasami przyjmuje się, że stopień takiego wielomianu $= -\infty$.

Formalna definicja symbolu $\sum\limits_{k=m}^{n} b_k$: (np. poprzednio było $b_k = a_k x^k$)

(dla $n \geq m$)

· dla $n=m$ kładziemy

$$\sum_{k=m}^{m} b_k = b_m$$

· jeśli $n>m$, to określamy

$$\sum_{k=m}^{n} b_k = \left(\sum_{k=m}^{n-1} b_k\right) + b_n$$

Np.: $$\sum_{k=2}^{4} k^3 = \left(\sum_{k=2}^{3} k^3\right) + 4^3 = \left(\left(\sum_{k=2}^{2} k^3\right) + 3^3\right) + 4^3 = 2^3 + 3^3 + 4^3$$

$$b_m + b_{m+1} + \ldots + b_n := \sum_{k=m}^{n} b_k$$

Funkcje wymierne

Funkcję postaci

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

gdzie P, R są wielomianami, $Q \neq 0$, nazywamy funkcją wymierną.

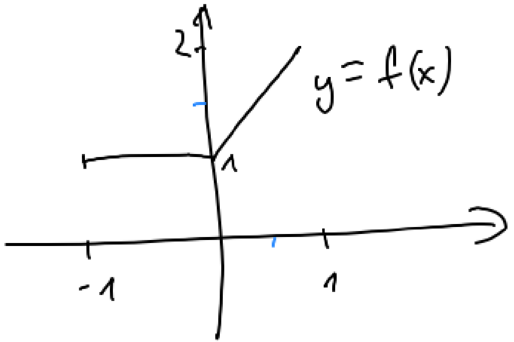
Naturalna dziedzina:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

Np.

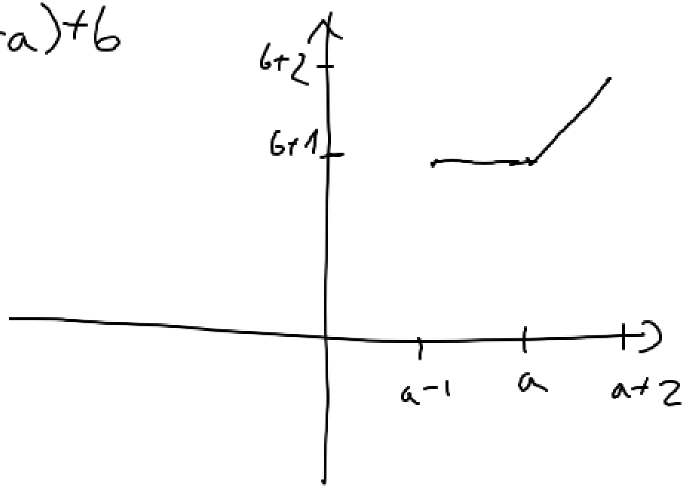
$$f_1(x) = \frac{2x+2}{x^2}, \quad f_2(x) = \frac{-x^3-1}{3}, \quad f_3(x) = \frac{1}{x+2}, \quad f_4(x) = \frac{2x+2}{x+1}$$

Przesuwanie wykresu:



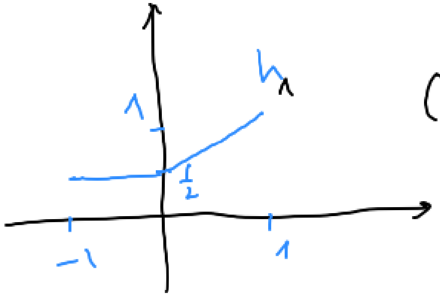
$g(x) = f(x-a)+b$

wykres g jest wykresem f przesuniętym o wektor (a,b)



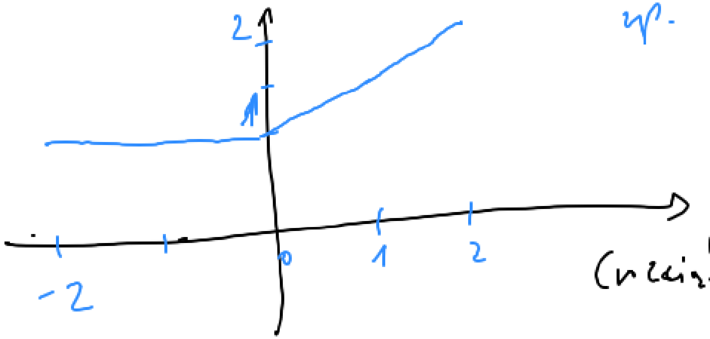
Skalowanie wykresu:

$h_1(x) = af(x)$ $(a>0)$

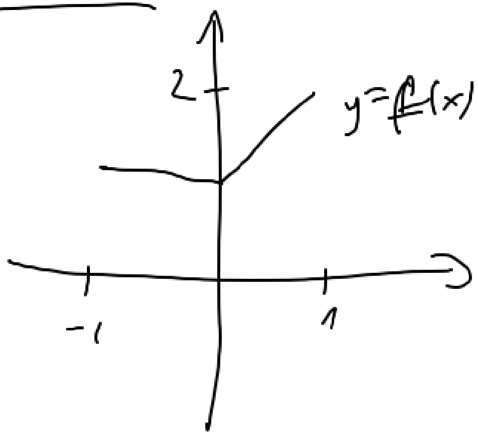


np. $a = \frac{1}{2}$ ⇝ (kurczymy dwukrotnie w pionie)

$h_2(x) = f(ax)$, $(a>0)$

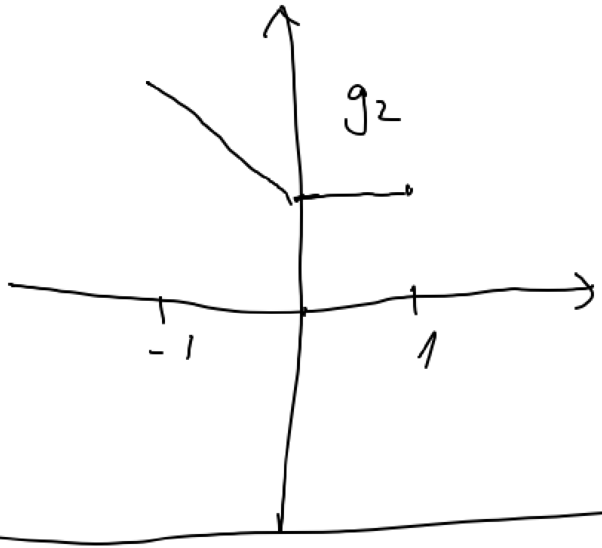


np. $a = \frac{1}{2}$ ⇝ $f\left(\frac{x}{2}\right)$ (rozciągamy 2x w poziomie) odbicia:



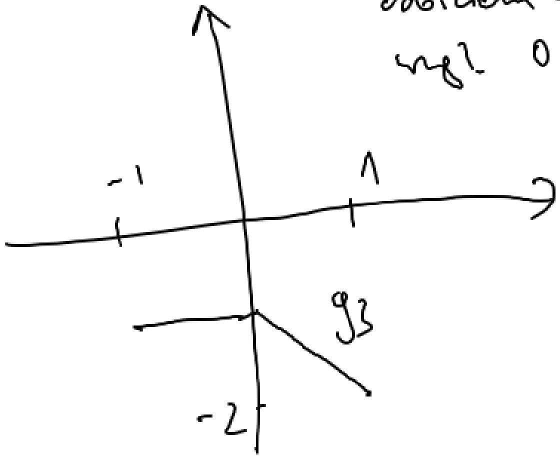
$g_2(x) = f(-x)$

(wykres g_2 jest odbiciem wykresu f wzgl. Oy)



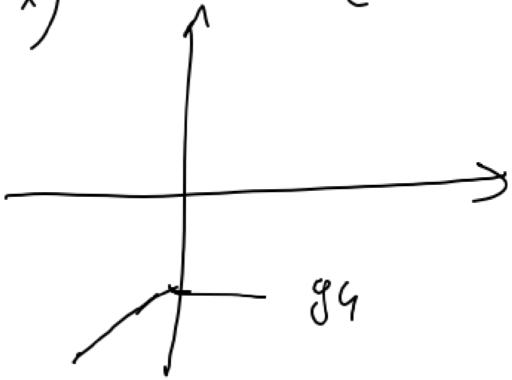
$g_3(x) = -f(x)$

(wykres g jest odbiciem wykresu f wzgl. 0x)

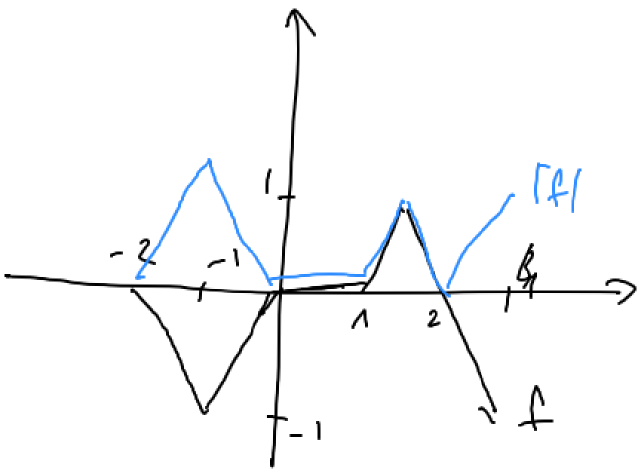


$g_4(x) = -f(-x)$

(odbicie wzgl. O)



$y = |f(x)|$

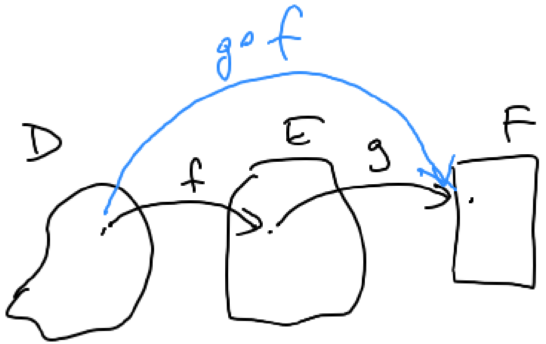


Składanie funkcji: niech:

$$f: D \to E \quad , g: E \to F$$

wówczas określony $g \circ f: D \to F$ wzorem

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad , x \in D$$



Nazywamy $g \circ f$ złożeniem funkcji g i f.

Np.

$f(\boxed{x}) = 3\boxed{x} + 7$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ tutaj $D = E = F = \mathbb{R}$

$g(\boxed{x}) = 2\boxed{x} - 1$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(\boxed{f(x)}) \begin{cases} = g(\boxed{3x+7}) = 2\boxed{(3x+7)} - 1 = 6x + 14 - 1 = 6x + 13 \\ = 2\boxed{f(x)} - 1 = 2(3x+7) - 1 = 6x + 13 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\boxed{2x-1}) = 3 \cdot \boxed{(2x-1)} + 7 = 6x - 3 + 7 = 6x + 4 \neq (g \circ f)(x)$$

Uwaga: o złożeniu mówimy również wtedy, gdy

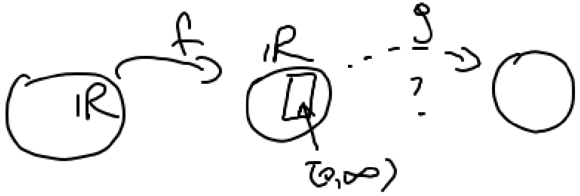
$$f: D \to E \quad \text{i} \quad g: F \to G$$

i niekoniecznie $E \subset F$, wówczas określamy

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad x \in \underbrace{D_{g \circ f} := \{x \in D : f(x) \in D_g\}}_{\text{naturalna dziedzina złożenia}}$$

Np. $f(x) = x+1$, $x \in \mathbb{R}$

$g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$



$g \circ f = ?$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x+1}$ dla $x \in \mathbb{R}$ takich, że $\underbrace{f(x) \in D_g}_{\substack{x+1 \geq 0 \\ x \geq -1}}$

czyli dla $x \geq -1$

Def. Funkcja <u>różnowartościowa</u> (w skrócie: <u>1-1</u>) to funkcja $f: D \to E$ spełniająca warunek

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$$

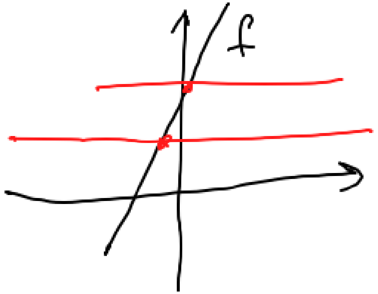
lub równoważnie warunek

$$\forall_{x_1, x_2 \in D} \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$$

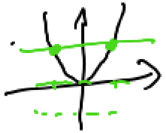
<u>Np.</u> Funkcja $f(x) = 3x + 7$ jest 1-1, bo jeśli $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ oraz $f(x_1) = f(x_2)$, to $3x_1 + 7 = 3x_2 + 7 \quad | -7$

$$3x_1 = 3x_2 \quad | :3$$

$$x_1 = x_2$$



<u>Np.</u> $g(x) = x^2$ <u>nie</u> jest 1-1, bo $g(-1) = 1 = g(1)$, ale $-1 \neq 1$.



Uwaga. Jeśli f jest rosnąca lub malejąca (ściśle), to f jest 1-1.

Funkcje odwrotne

Jeśli $f: D \to E$ jest 1-1, to istnieje funkcja

$g: f(E) \to D$ taka, że

$(g \circ f)(x) = x$ dla $x \in D$.

Tę funkcję g nazywamy funkcją odwrotną do f, ozn. $g = f^{-1}$.

Np. $f(x) = 3x+7$ jest 1-1, więc istnieje g taka, że

$$g(\underbrace{3x+7}_{y}) = x$$

$\boxed{g(y) = x}$, gdzie $y = 3x+7$

$$y - 7 = 3x$$

$$\boxed{\frac{y-7}{3} = x}$$

$$g(y) = \frac{y-7}{3}$$

$$g(x) = \frac{x-7}{3} \qquad f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$$

Uwaga: to nie jest $\frac{1}{f}$!

Sprawdźmy:

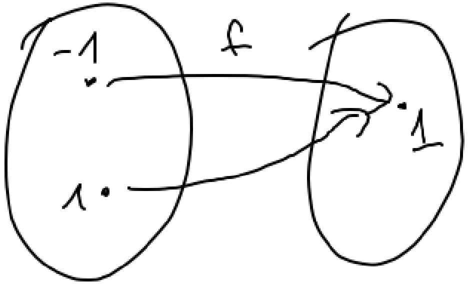
$$f^{-1}(\boxed{x}) = \frac{1}{3}\boxed{x} - \frac{7}{3} \qquad f(x) = 3x+7$$

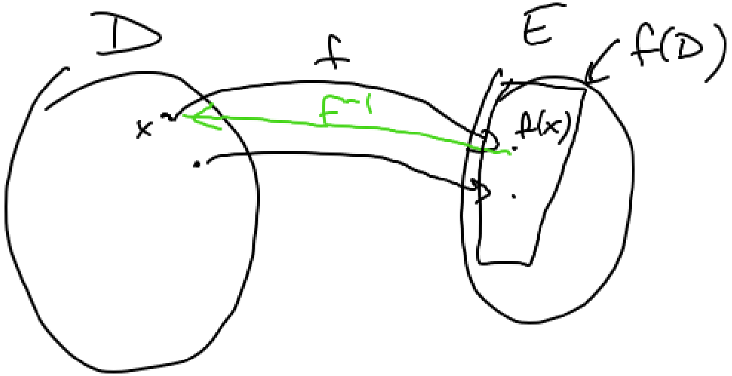
$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\boxed{3x+7}\right) = \frac{1}{3}\boxed{(3x+7)} - \frac{7}{3} = x + \frac{7}{3} - \frac{7}{3} = x$$

$f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ <u>nie</u> jest 1-1

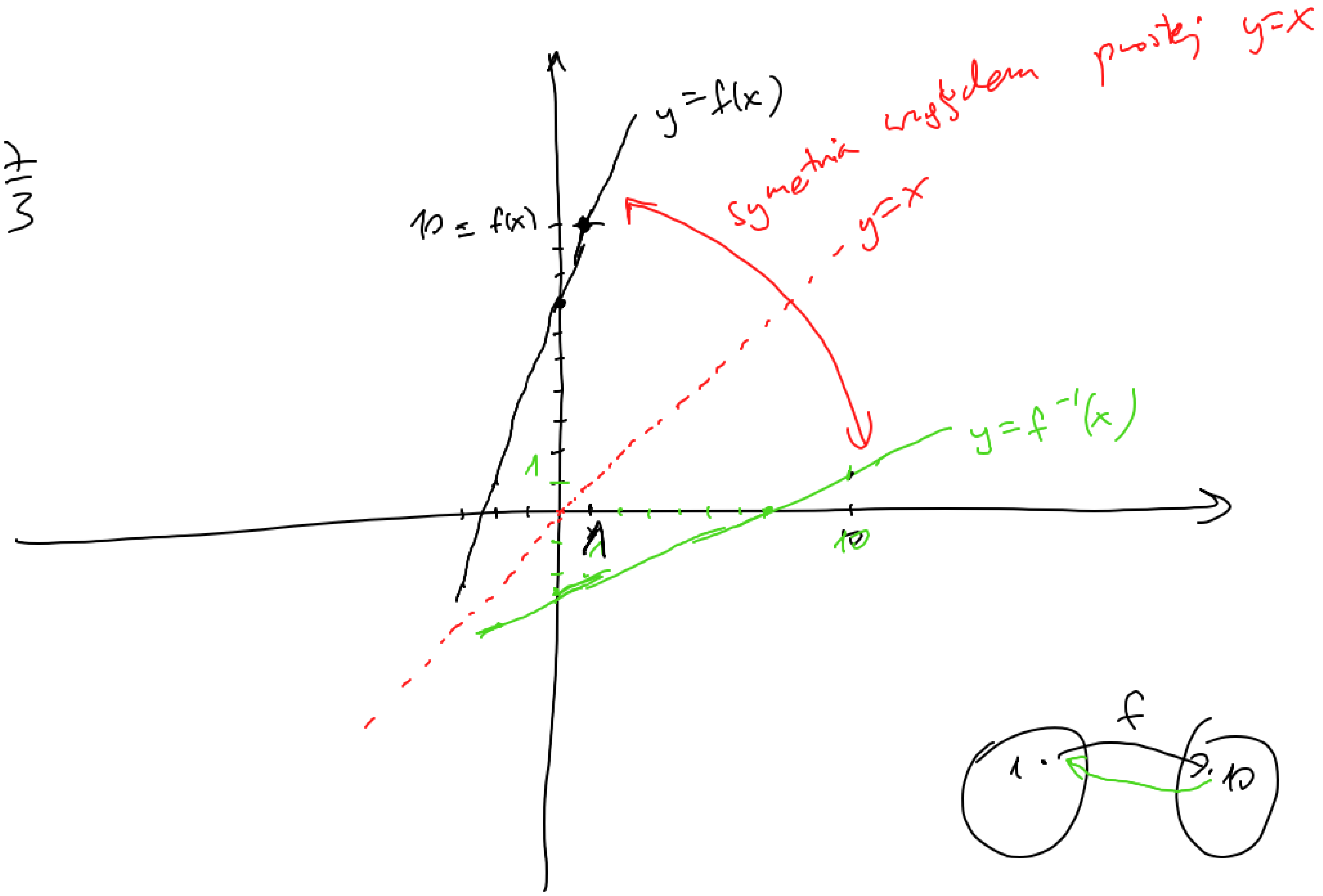
<u>nie</u> ma funkcji odwrotnej





$f(x) = 3x + 7$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$



Np. funkcja potęgowa $f(x) = x^n$

- dla n nieparzystych f jest 1-1 (na $\mathbb{R}$), więc ma f-cję odwrotną.

$$f^{-1}(x) = \underbrace{\sqrt[n]{x}}_{\text{oznaczenie}} \quad , \text{tzn.} \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad , x \in \mathbb{R}$$

$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

np. $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

- dla n parzystych $(n \geq 2)$ f nie jest 1-1, ale jest 1-1 po obcięciu do $[0, \infty)$

$f\restriction_{[0,\infty)}$ — 1-1, więc ma f-cję odwrotną, oznaczamy ją też przez $\sqrt[n]{\cdot}$

$$\left(f\restriction_{[0,\infty)}\right)^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

np. $\sqrt[2]{(x^2)} = x$ dla $x \geq 0$

piszemy w skrócie $\sqrt{\cdot} = \sqrt[2]{\cdot}$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3$$

ogólnie

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|$$, jeśli $x \in \mathbb{R}$ i n - parzyste

np.

$$\sqrt[4]{(-1)^4} = |-1| = 1$$

$$\sqrt[4]{2^4} = |2| = 2$$

Funkcja wykładnicze

$$f(x) = a^x \quad , a > 0 \quad , a \neq 1 \quad , x \in \mathbb{R}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}} \quad , n \in \mathbb{N}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

np. $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$

$$a^0 := 1$$

$$a^n := \frac{1}{a^{-n}} \quad \text{dla } n \in \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

np. $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

np. $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, $2^0 = 1$, $2^{-3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$

dla $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$:

definiujemy

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Nie jest oczywiste, że ta definicja jest poprawna: — ale jest.

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}$$

$$\shortparallel$$

$$a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3}$$

$$\shortparallel$$

$$a^{\frac{7}{14}} = \sqrt[14]{a^7}$$

$$2^{\sqrt{2}} = 2^{1,41\ldots}$$

$$2^1 = 2$$

$$2^{1,4} = 2^{\frac{14}{10}} = \sqrt[10]{2^{14}}$$

$$2^{1,41} = \sqrt[100]{2^{141}}$$

$$\vdots$$