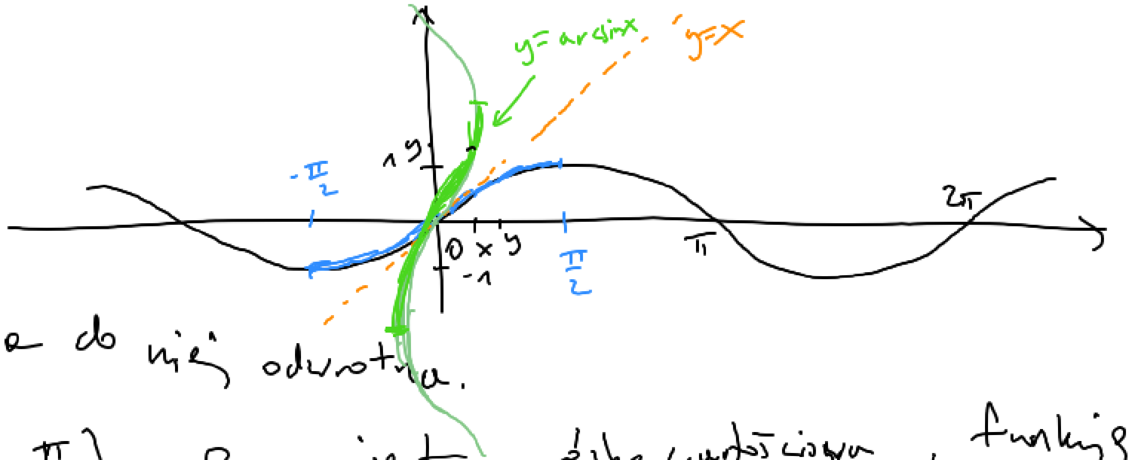
Funkcja sinus

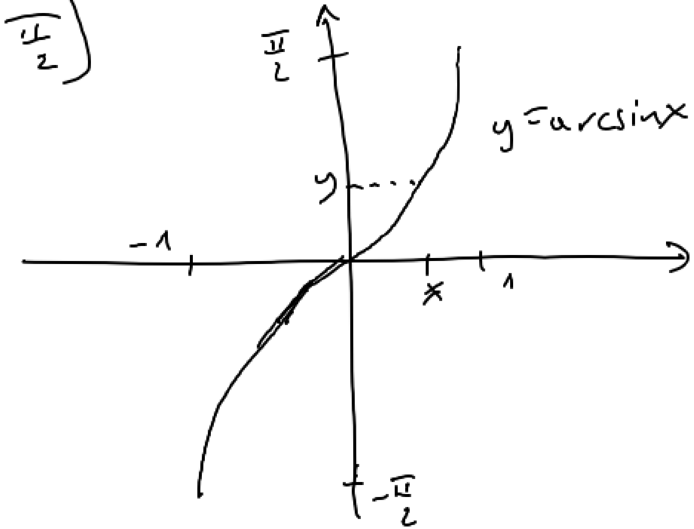
$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



nie jest różnowartościowa,

a więc nie istnieje funkcja do niej odwrotna.

Ale $\sin\restriction_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ jest różnowartościowa, funkcję do niej odwrotną oznaczamy przez $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



Tw.

$$\boxed{\arcsin x = y \iff \left(\sin y = x \ \wedge\ y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)}$$

$$\boxed{\arcsin x = y \iff \left(\sin y = x \wedge y \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right)}$$

Np.

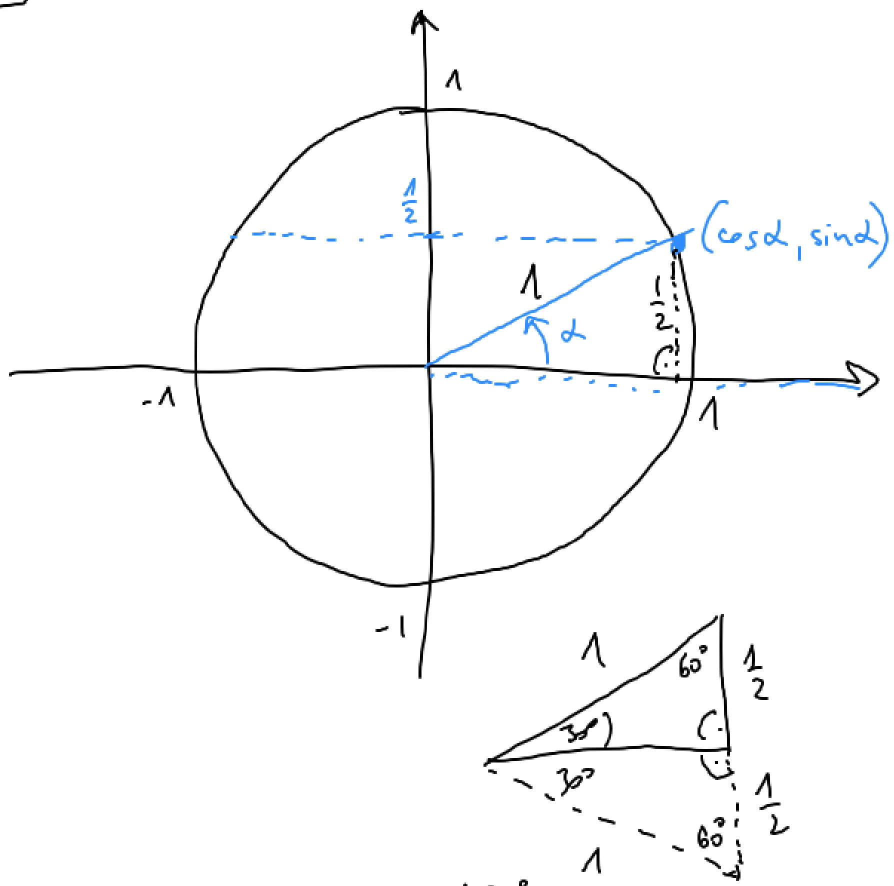
$$\arcsin \frac{1}{2} = \alpha \iff \sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

czyli α jest jak

na rysunku,

a więc $\alpha = \frac{\pi}{6}$



$180° = \pi$

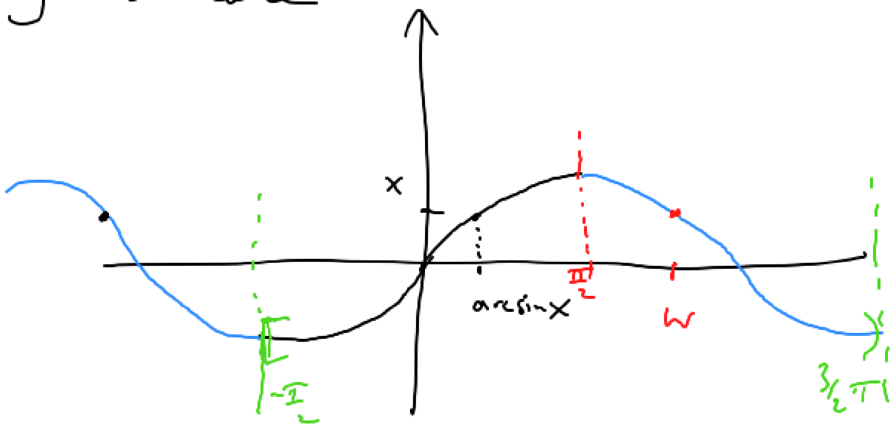
$30° = \frac{\pi}{6}$

Równanie:

$$\sin y = x \qquad , x\text{ – dane}, \ y\text{ – szukane}$$

$x \in [-1,1]$

jednym z rozwiązań jest $y = \arcsin x$
(jedynym na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)



Mamy dwie rodziny rozwiązań tego r-nia:

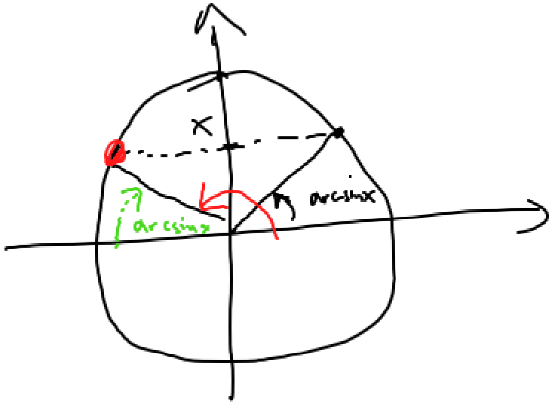
1) $y = \arcsin x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

lub

2) $y = \pi - \arcsin x + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$w - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$w = \pi - \arcsin x$$

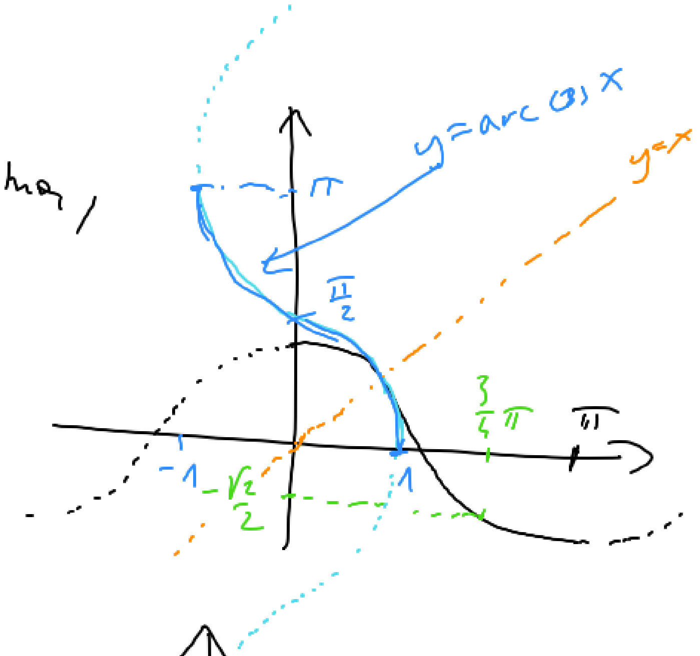


Funkcja $y = \cos x$ nie jest 1-1, ale

$\cos\restriction_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ jest 1-1, więc ma funkcję odwrotną,

którą oznaczamy arccos, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

$$\boxed{\arccos x = y \iff \left(\cos y = x \ \wedge\ y \in [0,\pi]\right)}$$



Np

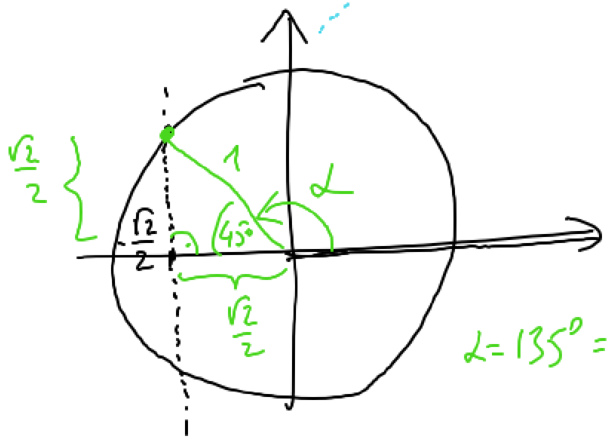
$\underline{\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \alpha}$

$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha \in [0,\pi]$

$\to \alpha = \frac{3}{4}\pi$

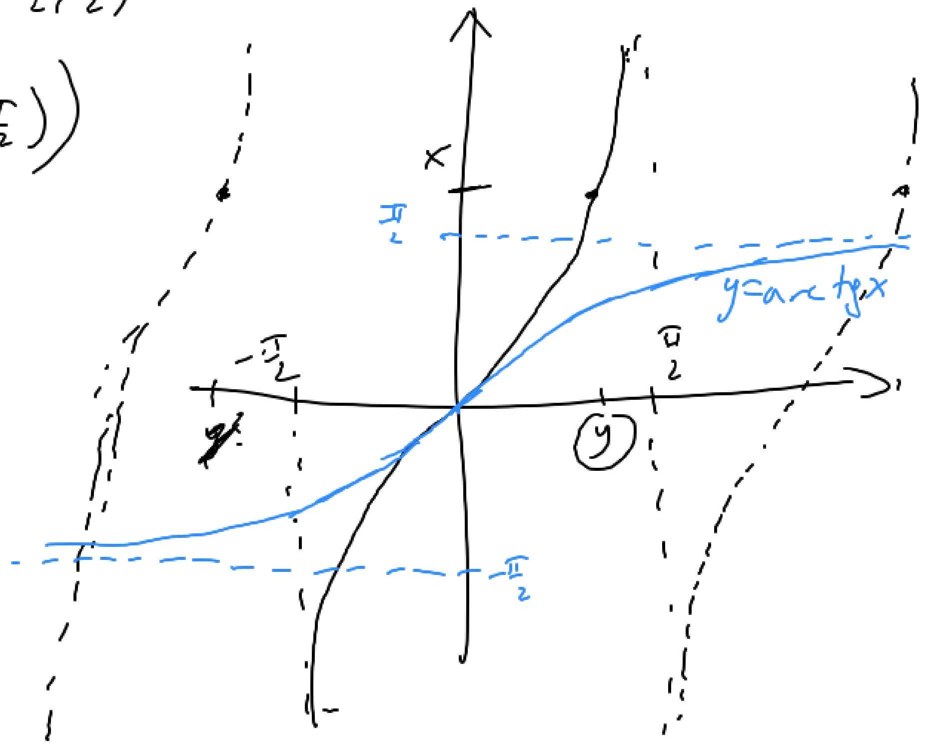
$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$



$\alpha = 135° = \frac{3}{4}\pi$

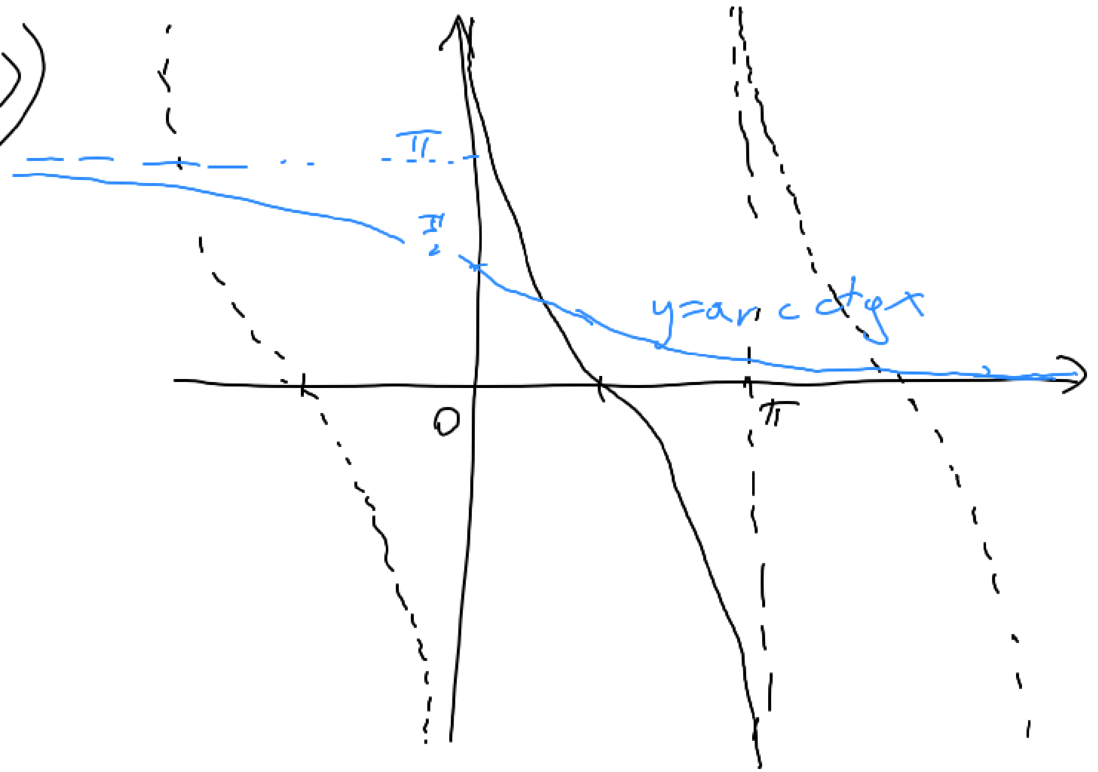
Funkcja tg nie jest 1-1, ale $tg\restriction_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} : (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ jest i f. do niej odwrotną oznaczamy arctg, $\text{arctg}: \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

$$\text{arctg}\, x = y \iff \left(tg\, y = x \wedge y \in (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})\right)$$



Funkcja ctg nie jest 1-1, ale $\mathrm{ctg}\restriction_{(0,\pi)}$ jest, f. odwrotną do niej oznaczamy przez arcctg, $\mathrm{arcctg}: \mathbb{R} \to (0,\pi)$

$$\mathrm{arcctg}\, x = y \iff (\mathrm{ctg}\, y = x \wedge y \in (0,\pi))$$



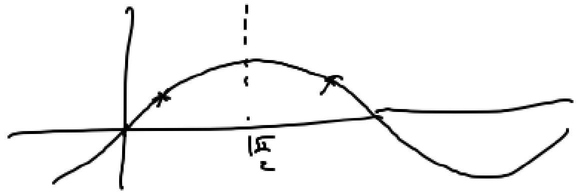
$\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = x$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

wiemy, że $x \in [0, \pi]$ oraz $\cos x = \sin\frac{\pi}{7}$

$$\cos x = \cos\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0} - \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1} =$$

$$= -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$



$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin\frac{\pi}{7}$

jedynym z rozwiązań jest $\frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{7}$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = x$

$x = \frac{5}{14}\pi \in [0, \pi]$ szczęśliwie się udało

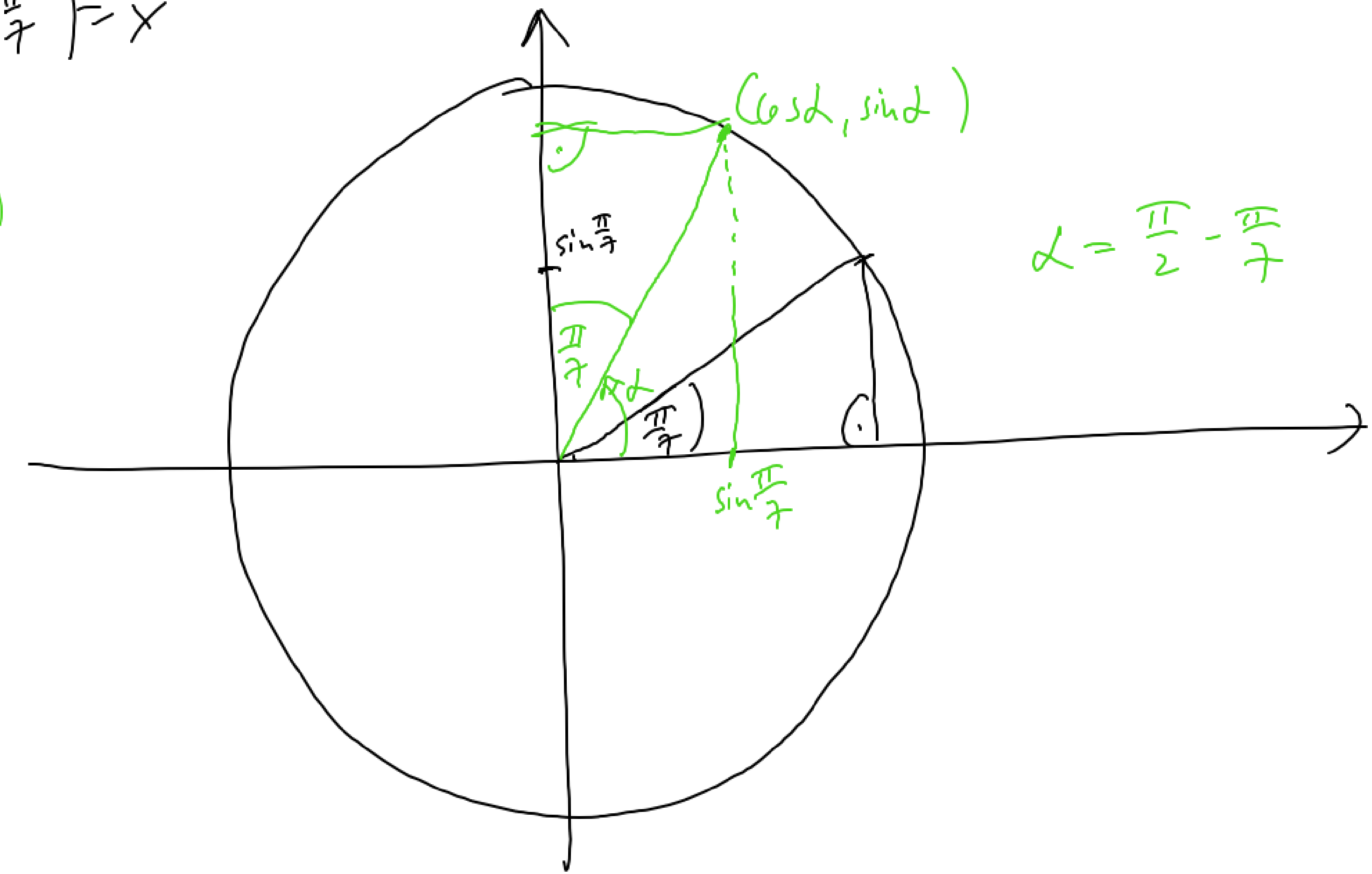
Odp. $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = \frac{5}{14}\pi$

$\arccos\left(\sin\frac{\pi}{7}\right) = x$

$\Updownarrow$

$\cos x = \sin\frac{\pi}{7}$

$x \in [0, \pi)$



$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$

Ciągi liczbowe

... to funkcje określone na zbiorze $\mathbb{N}$ o wartościach w $\mathbb{R}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — ciąg, inne oznaczenia:

$$f = (f(1), f(2), f(3), \ldots) = (f(n))_{n=1}^{\infty} = (f(n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Ogólniej, ciągiem będziemy też nazywali funkcje

$$f: \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \to \mathbb{R} \qquad \text{gdzie } n_0 \in \mathbb{Z}$$

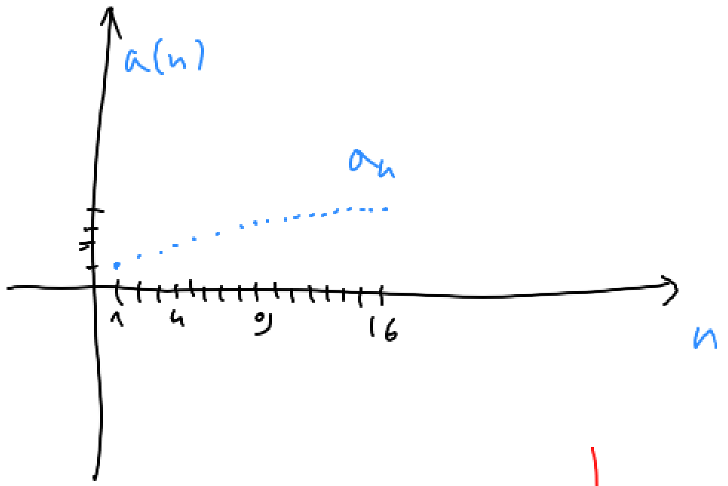
Np.

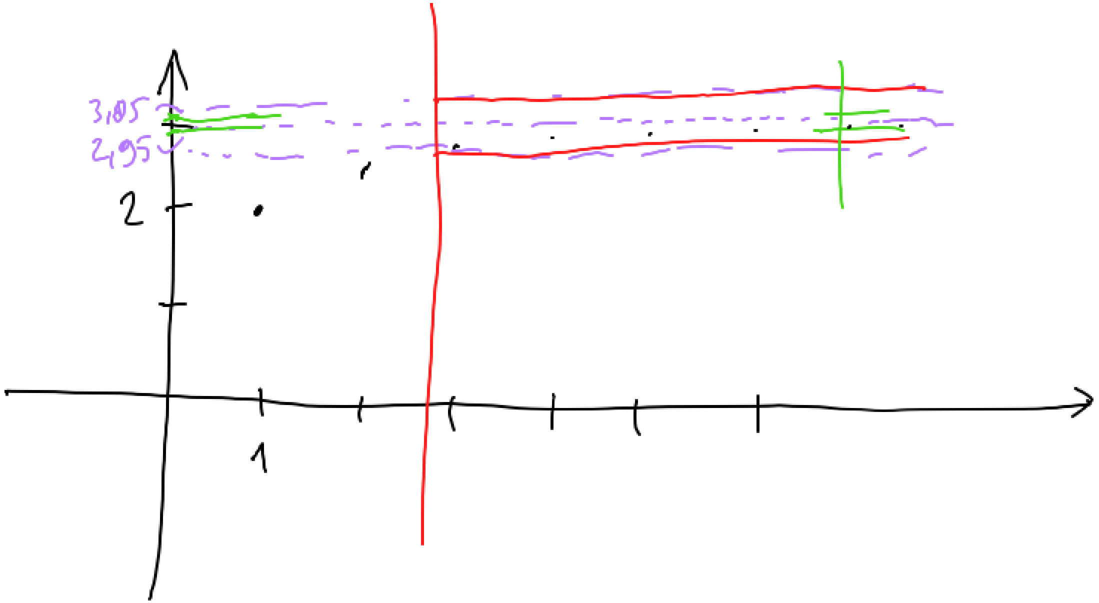
$f(n) = \sqrt{n-3}$, $n = 3, 4, \ldots$

$f = (0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots)$

Zwykle piszemy $f_n = f(n)$

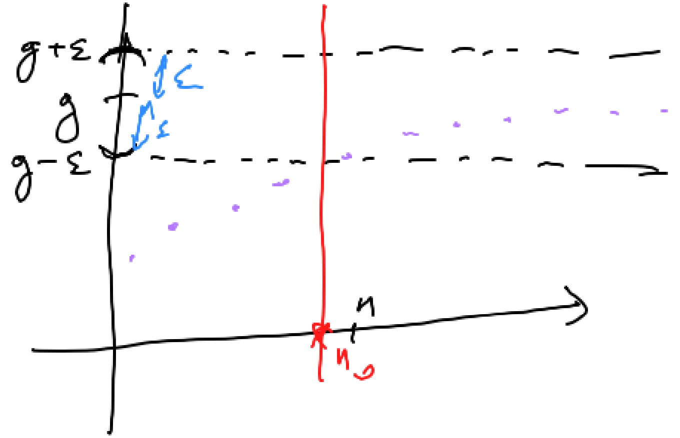
$a_n = \sqrt{n} \quad , n = 1, 2, 3, \dots$





$b_n = 3 - \frac{1}{n}$

Mówimy, że ciąg (a_n) zbiega do $g \in \mathbb{R}$, jeśli



$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{\substack{n_0 \\ n\in\mathbb{N}}} \; \forall_{n \geq n_0} \quad a_n \in (g-\varepsilon, g+\varepsilon)$$

to samo $\rightarrow$ $|a_n - g| < \varepsilon$

Oznaczenie: piszemy wówczas $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Np. $a_n = 3 - \frac{1}{n}$. Pokażemy, że (a_n) zbiega do 3.

Weźmy dow. $\varepsilon > 0$. Weźmy liczbę n_0 większą od $\frac{1}{\varepsilon}$, $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Dla $n \geq n_0$ chcemy: $|a_n - 3| < \varepsilon$

$$3-\varepsilon < a_n < 3+\varepsilon$$

$$3-\varepsilon < 3-\frac{1}{n} < 3+\varepsilon$$

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n} < \varepsilon$$

zawsze zachodzi

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n}$$

$$\varepsilon > \frac{1}{n}$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$n \geq \underline{n_0 > \frac{1}{\varepsilon}}.$$

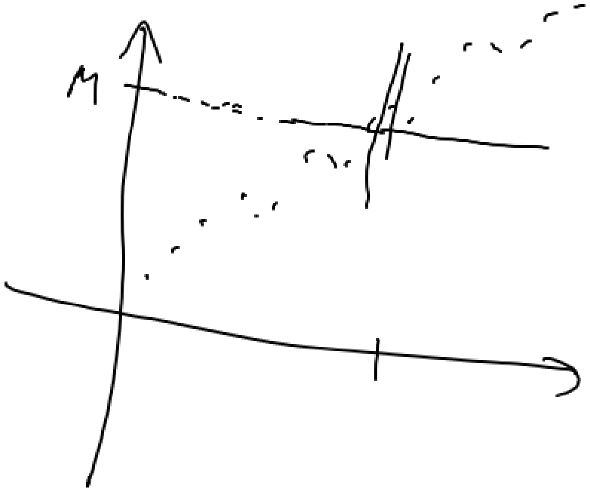
Dla $n \geq n_0$ zachodzi

$n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

... itd.

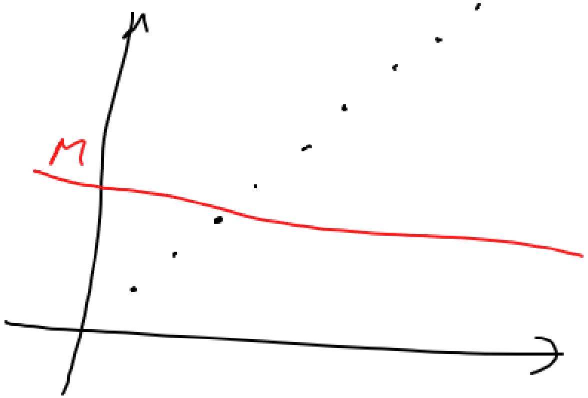
Mówimy, że ciąg (a_n) rozbiega do ∞, jeśli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \underset{(n\in\mathbb{N})}{\forall_{n\geq n_0}}\quad a_n \geq M.$$



Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Np. $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.



Mówimy, że ciąg (a_n) rozbiega do $-\infty$, jeśli

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{n_0}\ \underset{(n\in\mathbb{N})}{\forall_{n\geq n_0}}\quad a_n \leq M.$$

Piszemy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Np. $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

Tw. (o arytmetyce granic).

Załóżmy, że ciągi (a_n), (b_n) mają granice (odpowiednio) równe $a, b \in [-\infty, \infty]$.

Wówczas:

1) $\underset{n\to\infty}{\lim}$ (granica ciągu:) $(a_n + b_n) = a+b$, o ile $(a,b) \notin \{(\infty, -\infty), (-\infty, \infty)\}$

(Zabronione sytuacje po prawej: $\left.\begin{matrix} \infty - \infty \\ -\infty + \infty \end{matrix}\right\}$ niezdefiniowane)

Tutaj przyjmujemy, że $\infty + a = \infty$ dla $a \in (-\infty, \infty]$

$-\infty + a = -\infty$ dla $a \in [-\infty, \infty)$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$, o ile nie mamy sytuacji $\infty - \infty$ ani $(-\infty) - (-\infty)$

Przyjmujemy: $\infty - a = \infty$, $a \in [-\infty, \infty)$

$a - \infty = -\infty$

$-\infty - b = -\infty$, $b \in (-\infty, \infty]$

$b - (-\infty) = \infty$

3) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$, o ile nie mamy po prawej: $0 \cdot (\pm\infty)$ ani $(\pm\infty)\cdot 0$

Przyjmujemy $a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, & a \in (0, \infty] \\ -\infty, & a \in [-\infty, 0) \end{cases}$

$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = \begin{cases} -\infty, & a \in (0, \infty] \\ \infty, & a \in [-\infty, 0) \end{cases}$

4) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, o ile nie mamy po prawej $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$, $\frac{a}{0}$

$b \neq 0$ oraz

$\frac{\infty}{a} = \infty \cdot \frac{1}{a}$ (z def. wyżej)

$\frac{a}{\infty} = 0$ $(a \in \mathbb{R})$

Np.

$$\lim_{n\to\infty} (44) = 44$$

ogólniej jeśli $a_n = a$ dla $n \in \mathbb{N}$,

to $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \text{, bo } \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

z uogól. 4. twierdzenia:

$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}$ istnieje i równa się $\frac{2}{\infty} = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{3n-1}}{\underset{\to\infty}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) \overset{?}{=} \lim 3 - \lim \frac{1}{n} \overset{?}{=} 3 - \frac{\lim 1}{\lim n} = 3 - \frac{1}{\infty} = 3 - 0 = 3$$

$\frac{3n-1}{n} = 3 - \frac{1}{n}$

nie można bezpośrednio skorzystać z uogól. 4)

$$\lim (3n) \overset{?}{=} \lim 3 \cdot \lim n = 3 \cdot \infty = \infty$$

$$\lim (3n-1) \overset{?}{=} \lim 3n - \lim 1 = \infty - 1 = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+3n}{n^2}}{\frac{n(n-1)}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1+0}{1-0} = 1$$

$\infty \cdot \infty = \infty$

dzielimy licznik i mianownik przez n^k, gdzie k jest stopniem wielomianu w mianowniku