Przypomnienie:

Jeśli $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ $\quad (a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\})$, to

- $\lim\limits_{n} (a_n + b_n) = a + b$ o ile nie mamy $\infty + (-\infty)$, $(-\infty) + \infty$
- $\lim\limits_{n} (a_n b_n) = a \cdot b$ — " — $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$
- $\lim\limits_{n} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$ — " — $\frac{a}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$

symbole nieoznaczone (niezdefiniowane)

Przykłady

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{n} + \overset{\to 1}{1}}{\underset{\to 1}{1} + \underset{\frac{1}{\infty}=0}{\frac{1}{n}}} = \frac{\infty + 1}{1 + 0} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty$$

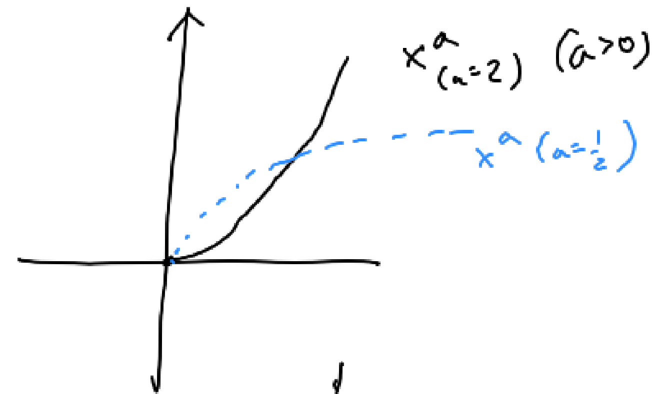
$$\lim_{n\to\infty} a = a$$

ciąg stały

Fakt.

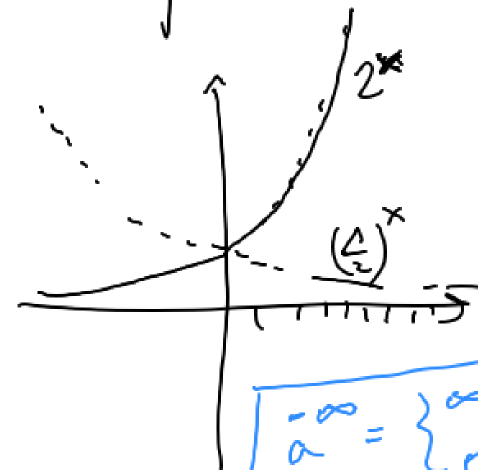
Zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} \infty, & a>0 \\ 1, & a=0 \\ 0, & a<0 \end{cases}$$



$(b>0)$

$$\lim_{n\to\infty} b^n = \begin{cases} \infty, & b>1 \\ 1, & b=1 \\ 0, & b\in(0,1) \end{cases}$$



$$\boxed{a^{-\infty} = \begin{cases} \infty, & a\in(0,1) \\ 0, & a\in(1,\infty) \end{cases}}$$

Ogólniej, jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $a\geq 0$, $a_n>0$, to

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$$

, o ile po prawej nie mamy wyrażenia postaci

$$1^\infty,\ 1^{-\infty},\ \infty^0,\ 0^b \text{ dla } b\leq 0$$

Przypomnienie:

$a^0 = 1$ dla $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$0^0=1$ – czasami taką konwencję przyjmujemy

Przyjmujemy:

$$\infty^a = \begin{cases} \infty, & a\in(0,\infty] \\ 0, & a\in[-\infty,0) \end{cases}$$

$$a^\infty = \begin{cases} 0, & a\in[0,1) \\ \infty, & a\in(1,\infty) \end{cases}$$

Przykład

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{\sqrt{n+1}}-\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{\sqrt{n}}\right)=$$

$\infty-\infty$ nie jest zdefiniowane

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{n}+\underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{1})^{\frac{1}{2}}=\infty^{\frac{1}{2}}=\infty\\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty\end{cases}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{\sqrt{n+1}}+\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{\sqrt{n}}}_{\substack{\downarrow\\ \infty}}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Np.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = 2$$

ale

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{7}{1+\frac{1}{n}} = 7$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(n+\frac{1}{n}\right) = \infty + 0 = \infty$$

Niech $g \in [0, \infty]$ dowolne. Istnieją

$a_n \to \infty$,

$b_n \to \infty$,

takie, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = g.$$

(Można też znaleźć $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ takie, że granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ nie istnieje).

Def

Mówimy, że ciąg (a_n) jest:

- rosnący od miejsca n_0, jeśli

$$a_{n+1} - a_n > 0 \quad \text{dla } n \geq n_0$$

- malejący od miejsca n_0, jeśli

$$a_{n+1} - a_n < 0 \quad \text{dla } n \leq n_0$$

- ograniczony z dołu, jeśli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \; a_n \geq M$$

- ograniczony z góry, jeśli

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \; a_n \leq M$$

- ograniczony, jeśli jest ograniczony z dołu i z góry.
- monotoniczny (od pewnego miejsca), jeśli jest rosnący lub malejący (od pewnego miejsca).

Np. Ciąg $a_n = n^2$.

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0 \quad \text{dla dow. } n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ (a_n) jest rosnący.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_n) \text{ - ogr. z dołu} \\ \Updownarrow \\ \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_n (a_n \geq M) \end{array} \right.$$

· Czy (a_n) jest ograniczony z dołu?

Tak, np. dla $M = 0$ zachodzi:

$$a_n = n^2 \geq 0 = M$$

ale też np. dla $M = -2021$:

$$a_n = n^2 \geq 0 > -2021 = M$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_n) \text{ - ogr. z góry} \\ \Updownarrow \\ \exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_n (a_n \leq M) \end{array} \right.$$

· Czy (a_n) jest ograniczony z góry?

Nie. Pokażemy to nie wprost — załóżmy, że istnieje liczba $M \in \mathbb{R}$, dla której

$$a_n \leq M \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

$$n = n \cdot 1 \leq n \cdot n = n^2 \leq M$$

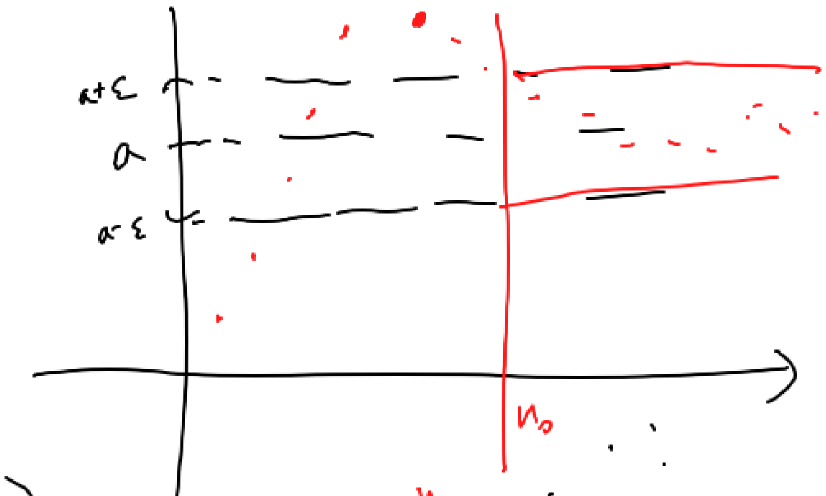
Żaden M ogranicza każdą liczbę naturalną z góry — sprzeczność.

Fakt. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, to:

- gdy $a=\infty$, to ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, ale nie z góry,
- gdy $a=-\infty$, — // — z góry, ale nie z dołu,
- gdy $a\in\mathbb{R}$, to ciąg (a_n) jest ograniczony (z góry i z dołu).

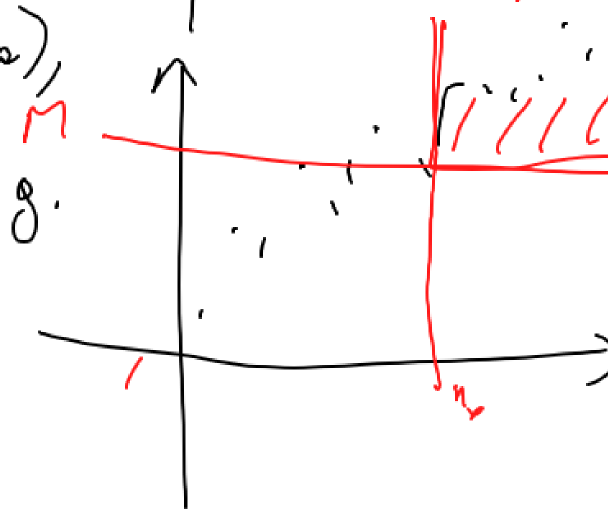
Fakt.

- Jeśli (a_n) jest ograniczony i monotoniczny (od pewnego miejsca), to $\lim_{n\to\infty} a_n$ istnieje i jest skończone.



- Jeśli (a_n) jest rosnący (od pewnego miejsca), i ~~nie jest ogr.~~ to ma granicę $\lim_{n\to\infty} a_n = g$.

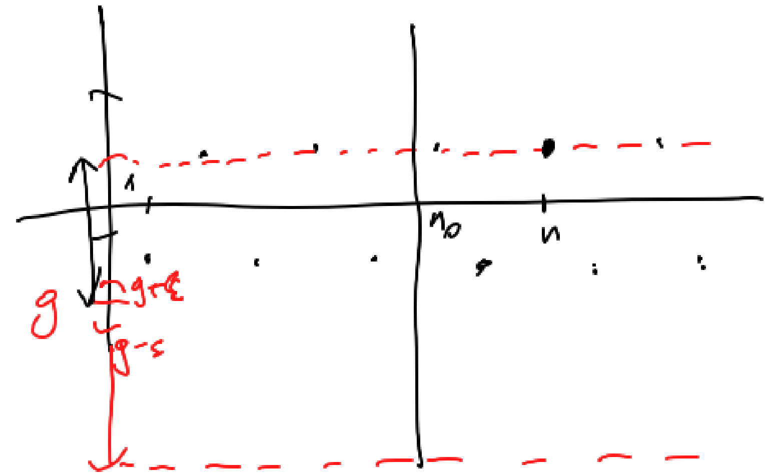
Jeśli (a_n) jest ogr. z góry, to granica $g\in\mathbb{R}$, jeśli (a_n) nie jest ogr. z góry, to $g=\infty$.



Przykład.

$\boxed{\lim a_n = g \in \mathbb{R} \iff \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0}\ \forall_{n\geq n_0}\ |a_n - g| < \varepsilon}$

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1, & n - \text{nieparzyste} \\ 1, & n - \text{parzyste} \end{cases}$$



Granica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje.

Nie wprost, załóżmy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ (istnieje).

1° $g \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. Niech $\varepsilon = |g-1| > 0$. Z definicji granicy istnieje n_0 takie, że $|a_n - g| < \varepsilon$ dla $n \geq n_0$. Wówczas dla $n \geq n_0$ parzystego zachodzi:

$$|1-g| = |a_n - g| < \varepsilon = |g-1|$$

↯

2° $g = 1$ podobnie jw.

3° $g \in \{\infty, -\infty\}$ też można dojść do sprzeczności.

Powiedzmy, że dajemy do banku 1 zł z oprocentowaniem 100% rocznie $= 1$

Ile będziemy mieli po roku?

- jeśli kapitalizacja jest roczna, to otrzymamy po roku

$$1 + 100\% \cdot 1 = 1 + 1 = 2$$

- jeśli kapitalizacja jest 2x na rok (w równych odstępach), to:

$$1 + \frac{100\%}{2} \cdot 1 = 1 + \frac{1}{2} \quad \text{— po pół roku}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}\right)}_{\text{nowy kapitał po pół roku}} \cdot \left(1 + \frac{100\%}{2}\right) = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{— po roku}$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} = 2 + \frac{10}{27} > 2{,}33\ldots$$

- jeśli kapitalizacja jest nx rok (w równych odstępach), to:

$$1 + \frac{100\%}{n} 1 = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{— po } \frac{1}{n} \text{ roku}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \quad \text{— po } \frac{2}{n} \text{ roku}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \quad \text{po } \frac{3}{n} \text{ roku}$$

$$\vdots$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{po roku}$$

Intuicyjnie jest jasne, że ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest rosnący.

Okazuje się, że ciąg $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ jest ograniczony z góry, a więc z poprzedniego faktu ma on granicę skończoną, oznaczamy ją przez e:

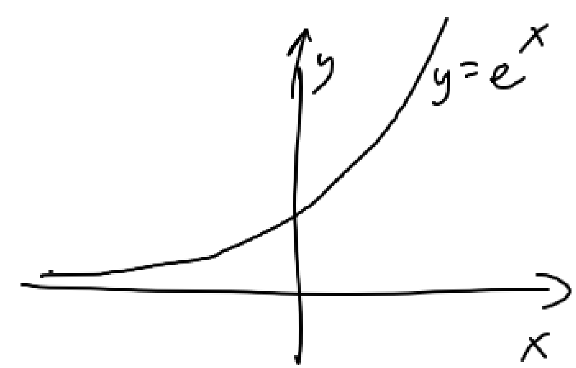
$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots$$

(e jest liczbą niewymierną)

A co gdy oprocentowanie wynosi nie 1 (=100%) w skali roku, tylko $a \in \mathbb{R}$ w skali roku? (Np. $a = 0.01 = 1\%$)

Wówczas przy n kapitalizacjach na rok, w równych odstępach, po roku będziemy mieli

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$



Można pokazać, że

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\Big(\underbrace{1+\frac{a}{n}}_{\substack{n\to\infty \\ \downarrow \\ 1}}\Big)^{\overset{\infty}{\nearrow} n} = e^a}$$

„1^∞" po lewej

Fakt. $a \in \mathbb{R}$

Jeśli $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, to

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{b_n}\right)^{b_n} \underset{(*)}{=} e^a$$

$$\frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2+\frac{3}{n}} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{n} \to 0$$

Np.

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^n}_{\text{"}1^\infty\text{"}} =$$

$$\frac{2n+1}{2n+3} = \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\underbrace{\left(1+\frac{-2}{2n+3}\right)^{2n+3}}_{\to e^{-2}}\right]^{\frac{n}{2n+3}} = \left(e^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$(*)$ $(a=2,\ b_n = 2n+3 \to \infty)$

$\frac{n}{2n+3} \to \frac{1}{2}$

Tw. (o 3 ciągach)

Jeśli $a_n \le b_n \le c_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, to granica $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ istnieje

i równa się g.

Np. $b_n = \frac{\sin n}{n}$

ciąg $(\sin n)$ nie ma granicy, ale

$$\underbrace{\frac{-1}{n}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{\sin n}{n}}_{b_n} \le \underbrace{\frac{1}{n}}_{c_n}$$

$$a_n \to 0 \qquad b_n \xrightarrow{\text{z tw. o 3 ciągach}} 0 \qquad c_n \to 0$$

$\lim a_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$

$\lim c_n = \lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

Z tw. o 3 ciągach:

$\lim b_n = 0.$

$a > 0, a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1$$

Np. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$

FAKT

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(n)^{\frac{1}{n}}}_{\text{„}\infty^0\text{" - nieoznaczony}} = 1$$

Np. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+5} \overset{?}{=} 2$

$$\underbrace{2}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 2}} = \sqrt[n]{2^n} \le \underbrace{\sqrt[n]{2^n+5}}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 2 \text{ tw. o 3 ciągach}}} \le \sqrt[n]{2^n+5\cdot 2^n} = \sqrt[n]{6\cdot 2^n} = \underbrace{\sqrt[n]{6}\cdot 2}_{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 2}}$$