Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, to ogólnie nie wiadomo, jaka będzie granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, ani czy w ogóle istnieje.

Jednak jeśli $a \neq 0$ oraz ciąg (b_n) ma stały znak (tzn. $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ albo $b_n < 0$ dla $n \in \mathbb{N}$), to granica $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ istnieje (granica typu „$\frac{a}{0^+}$" lub „$\frac{a}{0^-}$"). Granica ta jest równa:

$+\infty$, jeśli $b_n > 0$ i $a > 0$ lub jeśli $b_n < 0$ i $a < 0$

$-\infty$, jeśli $b_n > 0$ i $a < 0$ lub jeśli $b_n < 0$ i $a > 0$.

$$\frac{a}{0^-} = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases} \qquad \frac{a}{0^+} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

Np.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-2}{\frac{1}{n}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$\to -2$

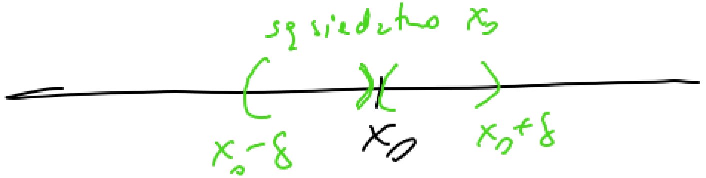
$\downarrow 0^+$ $\quad \frac{1}{n} > 0$

$$= \lim_{n\to\infty} (-2n) = -2\cdot\infty = -\infty$$

Granice funkcji

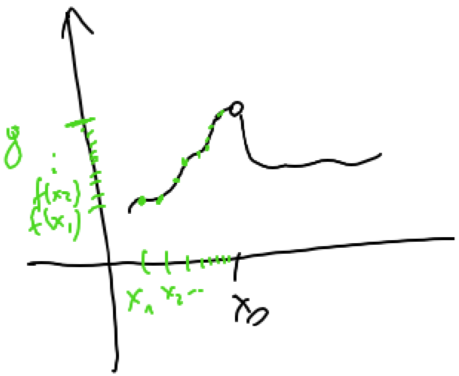
Powiedzmy, że $f: D \to \mathbb{R}$ jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu $x_0 \in \mathbb{R}$, tzn. na pewnym zbiorze postaci $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$

(Innymi słowy zakładamy, że dla pewnej liczby $\delta > 0$ zachodzi $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta) \subset D$).



Wówczas mówimy, że f ma w punkcie x_0 granicę (obustronną) $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że

1) $x_n \in D$, $x_n \neq x_0$
2) $x_n \to x_0$ (tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$)



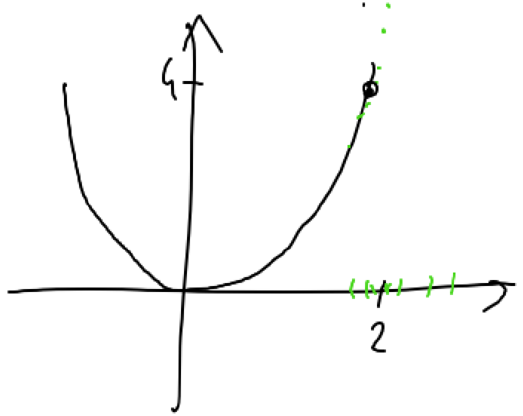
zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g.$$

Piszemy wtedy $g = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Np.: $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$

~~Wk~~ Sprawdzimy, że $\lim_{x \to x_0} f(x) = 4$.



Weźmy dowolny ciąg (x_n) taki, że:

1) $x_n \neq 2$, $x_n \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 = 2$.

Wówczas

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} (\underset{\downarrow \atop 2}{x_n} \cdot \underset{\downarrow \atop 2}{x_n}) = 2 \cdot 2 = 4$$

Jeśli $f: D \to \mathbb{R}$ jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie x_0, tzn. istnieje $\delta > 0$ t. że $(x_0 - \delta, x_0) \subset D$

— lub jest określona w pewnym prawostronnym sąsiedztwie x_0, tzn. istnieje $\delta > 0$ t. że $(x_0, x_0 + \delta) \subset D$,

to mówimy, że f ma <u>lewostronną</u> (odp. <u>prawostronną</u>) granicę w x_0 równą $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że

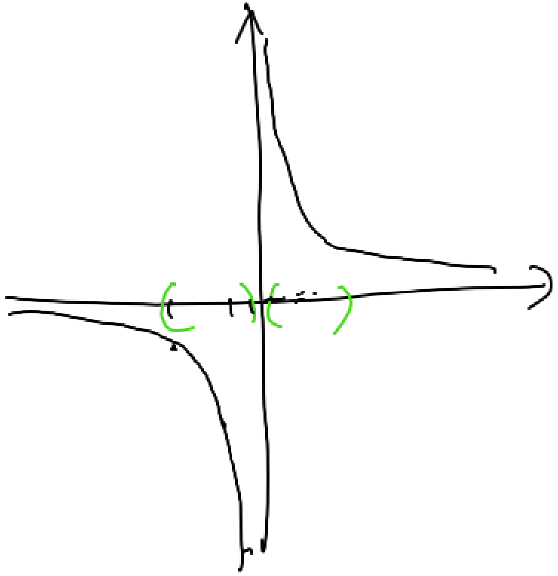
1) $x_n \in D$ oraz $x_n < x_0$ (odpowiednio: $x_n > x_0$ dla prawostronnej granicy)

2) $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$

zachodzi $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$. Piszemy wówczas $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g$ (odp. $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g$).

Jeśli $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, to również $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Np. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $x_0 = 0$.



Pokażemy, że $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$.

Niech (x_n) będzie dowolnym ciągiem spełniającym

1) $x_n < x_0 = 0$, $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$

wtedy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$$

$1 \to 1$, $x_n \to 0^-$, $x_n < 0$

np. $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{10}$, $x_3 = \frac{-1}{100}$, ...

$f(x_n) =:$ -1, -10, -100

Podobnie można pokazać, że $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

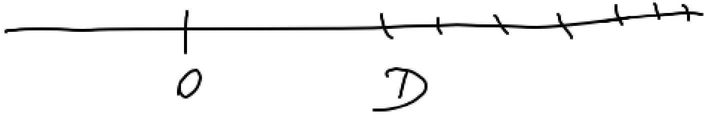
Fakt. Granica (ciągu lub funkcji) — jeśli istnieje — to jest jedyna.

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n \qquad \lim_{x\to x_0} f(x), \ x_0 \text{ - ustalone}}$$

Wobec tego jeśli $\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, to granica $\lim_{x\to x_0} f(x)$ <u>nie</u> istnieje

---

Załóżmy, że $f: D \to \mathbb{R}$ ma taką własność, że istnieje ciąg (x_n) t. że $x_n \in D_f$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (odp. $-\infty$). Wówczas mówimy, że f ma granicę $g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ w $+\infty$, (odp. $-\infty$) jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) takiego



1) $x_n \in D$,

2) $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (odp. $= -\infty$)

zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$. Piszemy wówczas $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. (Odp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = g$)

Np.:

$$f(x)=\frac{x^2+3}{(x+1)^2}$$

$$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

Weźmy dowolny ciąg (x_n) taki, że:

1) $x_n\in D_f$, tzn. $x_n\neq -1$

2) $x_n\to\infty$

Wtedy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+3}{(x_n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{x_n^2}\overset{\to 1}{\left(1+\overset{\to 0}{\frac{3}{x_n^2}}\right)}}{\cancel{x_n^2}\underbrace{\left(\underset{\to 1}{1}+\underset{\to 0}{\frac{1}{x_n}}\right)^2}_{1^2=1}}=\frac{1}{1}=1$$

To oznacza, że

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{(x+1)^2}=1.$$

Dla granic funkcji zachodzi analogiczne tw. o arytmetyce granic jak dla ciągów:

Tw. Załóżmy, że $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$, gdzie $\lim$ jest jednym z następujących symboli: $\lim\limits_{x\to x_0^-}$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}$, $\lim\limits_{x\to x_0}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}$ — zawsze tym samym.

Wówczas:

$$\lim \left(f(x) + g(x) \right) = a+b,$$

$$\lim \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b$$

$$\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{a}{b} \qquad (g \neq 0 \text{ na odp. zbiorze})$$

$$\lim f(x)^{g(x)} = a^b \qquad (f(x) \geq 0 \text{ ——— })$$

o ile po prawej nie mamy symbolu nieoznaczonego.

Np. Jeśli $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \infty$, to $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)\cdot g(x) = 3\cdot\infty = \infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)^{g(x)} = 3^\infty = \infty$

<u>Uwaga:</u> jeśli np. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, to o granicy $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

ogólnie nie można nic powiedzieć (może nie istnieć, może istnieć — jeśli tak, to może mieć ~~dw~~ różne wartości)

Natomiast jeśli założymy dodatkowo, że $a \neq 0$ oraz

$$g(x) > 0 \quad \text{dla} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

(lub: $g(x) < 0$ — " —)

to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{0^+} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

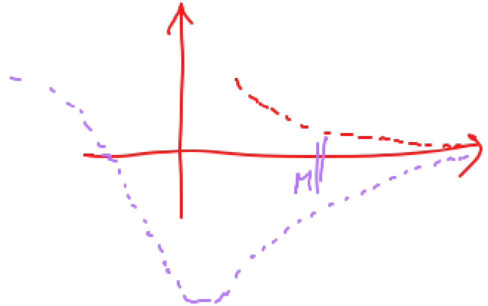
(lub odp.: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{0^-} = \begin{cases} -\infty, & a > 0 \\ \infty, & a < 0 \end{cases}$)

Analogicznie np. dla $\lim\limits_{x\to\infty}$:

dla pewnego M

$g(x) > 0$ dla $x \geq M$

(odp.: $g(x) < 0$ dla $x \geq M$)

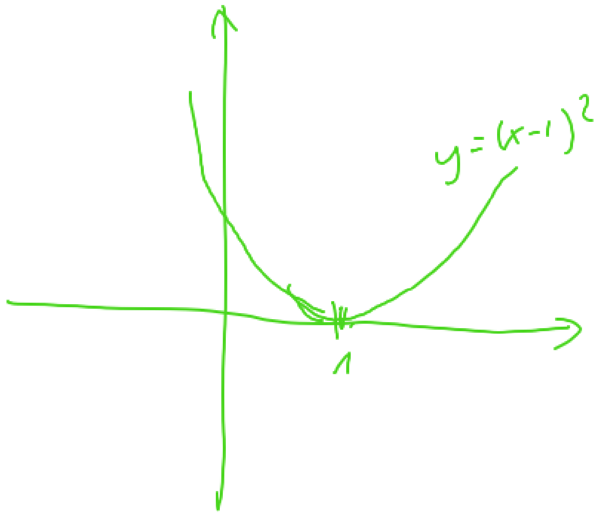


Np.

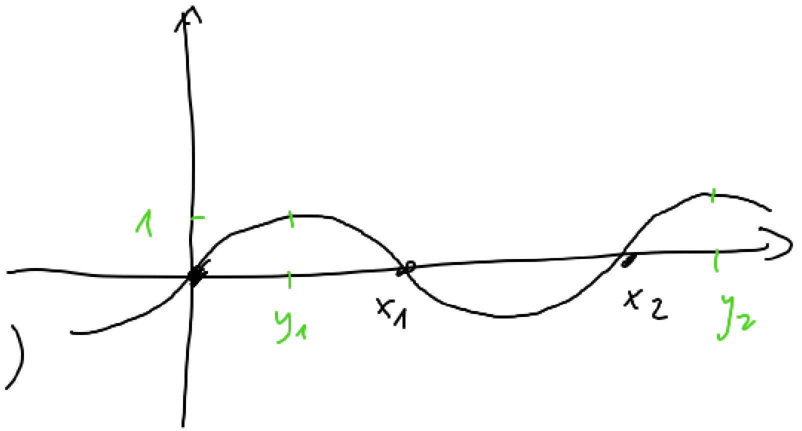
$$\lim_{x\to 1} \frac{\overset{\to 3}{3}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\to 0^+}} = \frac{3}{0^+} = \infty$$

ale $(x-1)^2 > 0$

[illegible] $x \neq 1$



Np. $\lim_{x\to\infty} \sin x$



Pokażemy, że granica <u>nie</u> istnieje.

W tym celu skonstruujemy dwa ciągi (x_n), (y_n)

takie: $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$

oraz $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$

Np.

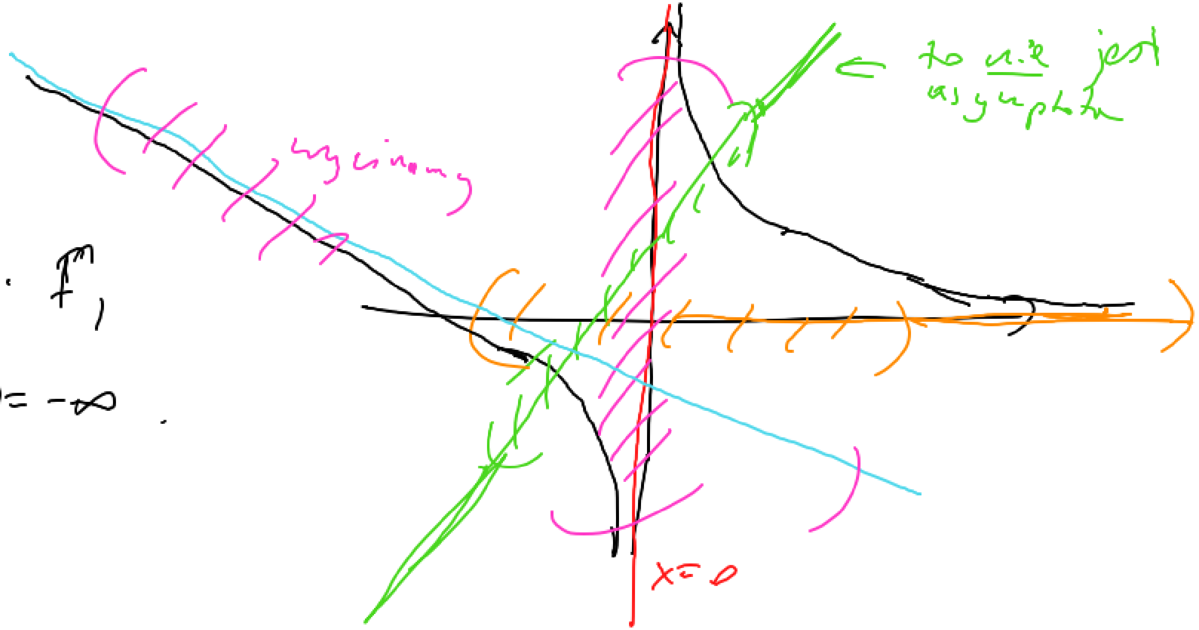
$x_n = n\pi \to \infty$

$f(x_n) = \sin n\pi = 0 \to 0$

$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty$

$f(y_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1$

Asymptoty funkcji



Mówimy, że prosta $x=x_0$ jest

- asymptotą pionową lewostronną (wykresu) funkcji f,

jeśli $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$.

- asymptotą pionową prawostronną f, jeśli:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$$

- asymptotą pionową (obustronną), jeśli

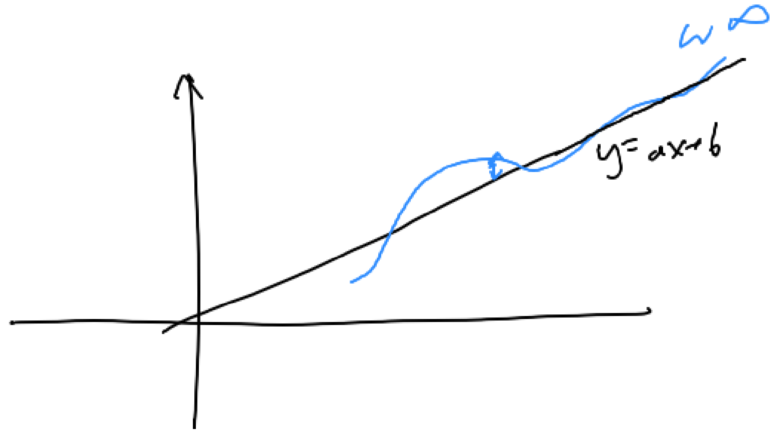
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\pm\infty \quad \text{oraz} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\pm\infty$$

niekoniecznie tego samego znaku

Mówimy, że prosta $y=ax+b$ jest <u>asymptotą ukośną</u> w ∞ (odp. w $-\infty$)

jeśli $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-(ax+b)\big)=0$

(odp. $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(\ -\|-\ \big)=0$).



<u>Uwaga:</u> współczynniki a, b można znaleźć ze wzorów:

(*) $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ (odp. $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

(**) $b=\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-ax\big)$ (odp. $\lim\limits_{x\to-\infty}$)

Jeśli granica $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ <u>nie</u> istnieje lub istnieje, ale jest nieskończona to asymptoty ukośnej w ∞ <u>nie ma</u>

~~Jeśli~~

f ma asymptotę ukośną ~~[illegible]~~ w ∞ $\iff$ granice (*) i (**) istnieją i są skończone

Np. Niech $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Znajdziemy asymptoty ukośne tej funkcji.

- w ∞:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+\cancel{1}}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\to\infty} + \underbrace{x}_{\to\infty}}_{\to\infty}} = 0$$

$\Rightarrow$ $y = 1\cdot x + 0 = x$ jest asymptotą ukośną w ∞

, w $-\infty$:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{\geq 0}}{\underbrace{x}_{<0}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \cancel{\lim_{x\to-\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1}$$

≤ 0

może tak

$\sqrt{x^2} = |x| = -x$ dla $x \to -\infty$

$x^2 \to \infty$

Ale jeśli $g(x) \leq 0$, ! to $\lim g(x) \leq 0$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = -1.$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1} - (-1)\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{+\infty}\ \underbrace{-x}_{-\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$y = -x$ jest a. ~~pion~~ ukośną w $-\infty$