Fakt.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$\ln=\log_e$, $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$e^{\ln a}=a \quad (a>0)$

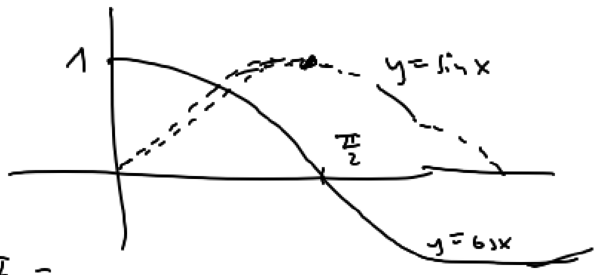
$\ln e^x = x \quad (x\in\mathbb{R})$

Np.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\ln 2}\right)^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\overbrace{x\ln 2}^{y=\,\to 0}}-1}{\underbrace{x\ln 2}_{y=\,\to 0}}\cdot\ln 2=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\ln 2=1\cdot\ln 2=\ln 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(2x+1)}=\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin 3x}{3x}}_{\to 1}\cdot 3\cancel{x}\cdot\frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(2x+1)}{2x}}_{\to 1}\cdot 2\cancel{x}}\right)=1\cdot 3\cdot\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{\to 0}}{2\underbrace{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{= y \\ \to 0}}} = \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}$$



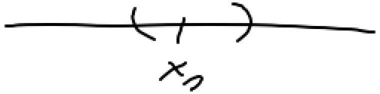
$$\cos x = \cos\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2} - \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2} =$$

$$= 0 - \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

Ciągłość funkcji

Niech $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ i załóżmy, że $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ma sens (~~to~~ innymi słowy, f jest określone na pewnym otoczeniu punktu x_0).

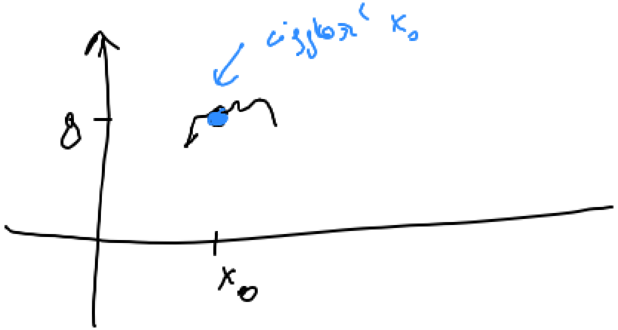


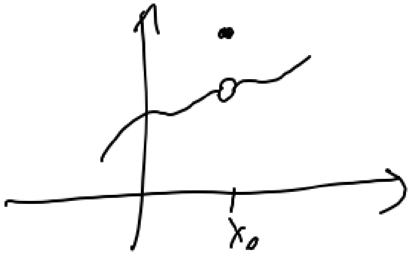
Mówimy, że f jest ciągła w punkcie x_0, jeśli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

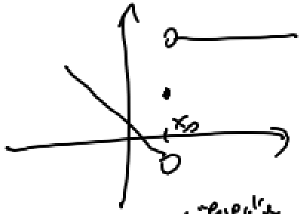
W przypadku, gdy f jest określone tylko na prawostronnym (lub lewostronnym) sąsiedztwie x_0 ~~to~~ to przyjmujemy, że f jest ciągła w $x_0 \in D$, jeśli $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (odp. $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$).

i pewne sąsiedztwo lewostr. (odp. prawostr.) jest rozłączne z dziedziną





nieciągła w x_0

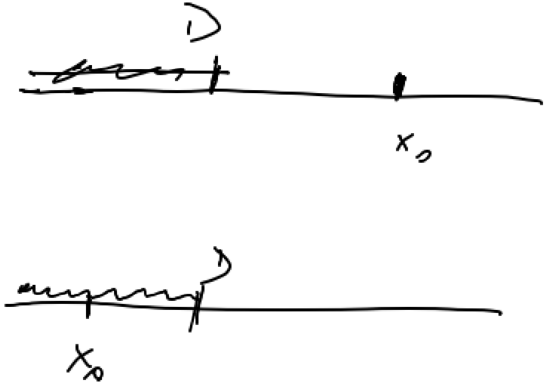


nieciągła w x_0

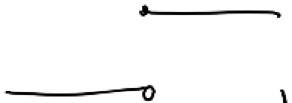
Def. Mówimy, że $f: D \to \mathbb{R}$ jest <u>ciągła</u> <u>w $x_0 \in D$</u>, jeśli dla dowolnego ciągu (x_n) takiego, że:

- $x_n \to x_0$
- $x_n \in D$

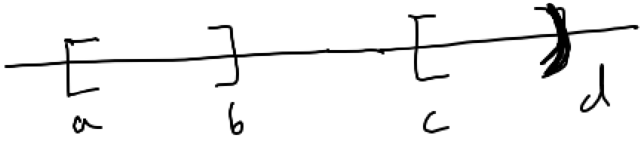
zachodzi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.



Def. Mówimy, że $f: D \to \mathbb{R}$ jest <u>ciągła</u>, jeśli jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in D$.



nie jest ciągła



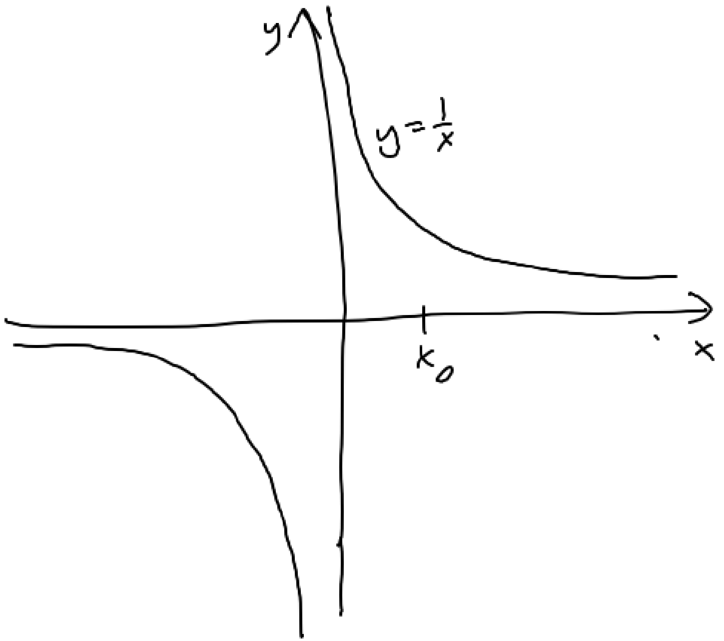
Np. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Sprawdźmy, że f jest ciągła.

Weźmy dowolny punkt $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Mamy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} = f(x_0).$$



Fakt Funkcje elementarne: sin, cos, tg, ctg, exp, wielomiany, f. wymierne i funkcje do nich odwrotne są ciągłe.

Tw. Jeśli $f, g: D \to \mathbb{R}$ są ciągłe w x_0, to $f \pm g$, $f \cdot g$ też są ciągłe w x_0.

Jeśli dodatkowo $g(x_0) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ jest ciągła w x_0.

Dd. (Dla $f+g$).

Weźmy dowolny ciąg (x_n) taki, że $x_n \in D$ oraz $x_n \to x_0$.

Wówczas z założenia ciągłości f, g: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$.

Wobec tego

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(\underbrace{f(x_n)}_{\downarrow \atop f(x_0)} + \underbrace{g(x_n)}_{\downarrow \atop g(x_0)} \Big) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

$\otimes$

Wniosek. Suma, iloczyn, iloraz funkcji elementarnych jest f. ciągłą.

Np. $f(x) = \underbrace{\underbrace{x^2} \cdot \underbrace{\sin x}} + \underbrace{3}$ jest ciągła

$f(x) = \sin(2x)$?

$\quad\quad\quad \| $

$\quad\quad 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

Tw.: Jeśli $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{R}$ są ciągłe, to ich złożenie $g \circ f$ też jest ciągłe.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & E \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g \circ f : D \to \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Wp.: $h(x) = e^{\sin x}$ - ciągła, bo $h = \exp \circ \sin$

f. ciągłe

Wp.:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

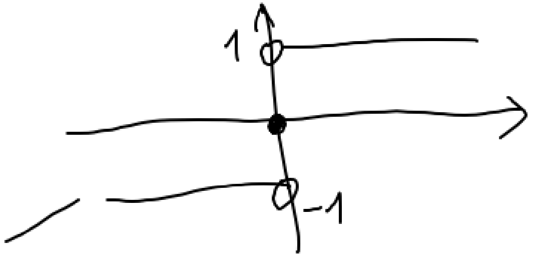
bo sin jest ciągła

$$\lim_{x \to 2} e^x = e^2$$

bo exp jest ciągła (lub z tw. o arytmetyce granic)

Np.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$



nie jest ciągła w 0.

Bo: np. $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \in D_{\operatorname{sgn}}$

ale $\operatorname{sgn} \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \neq \operatorname{sgn} 0 = 0$

(ξ z def. ciąg. w 0)

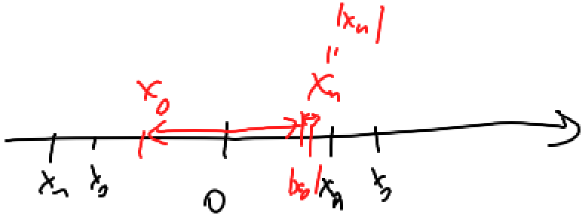
Ale np.

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{dla } x < 0 \\ x, & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$ jest ciągła

Dowód: Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Weźmy dowolny ciąg (x_n) t.że $x_n \to x_0$.

Zachodzi $0 \leq \big||x_n| - |x_0|\big| \leq |x_n - x_0|$

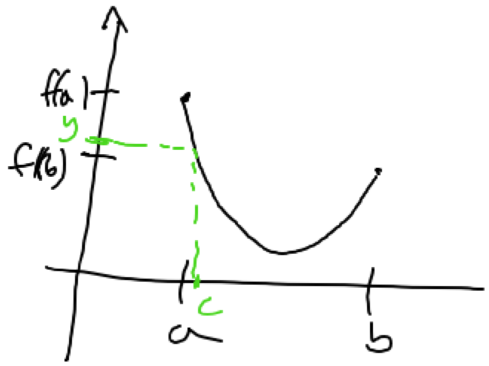
Więc wystarczy pokazać, że $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$. (Pomijamy).



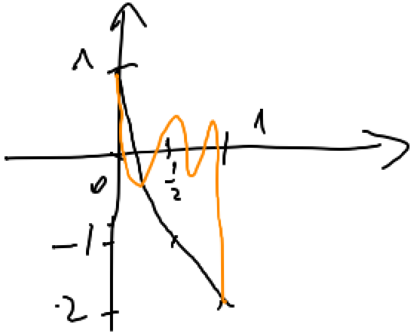
$\boxtimes$

Własności funkcji ciągłych

Tw. (Darboux) Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $f(a)\neq f(b)$. Wówczas dla dowolnego y leżącego pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $c\in[a,b]$ takie, że $f(c)=y$.



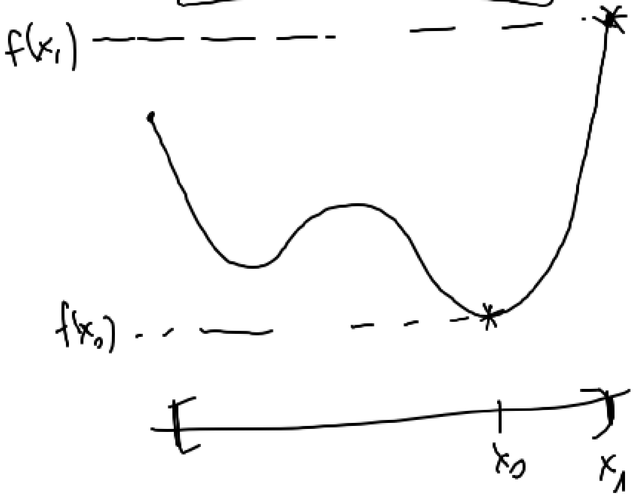
Wniosek. Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła i $f(a)f(b)<0$, to istnieje $c\in(a,b)$ takie, że $f(c)=0$.

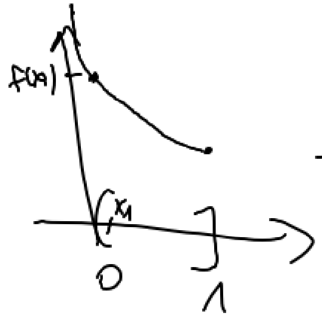


Tw. (Weierstrass)

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie ciągła. Wówczas istnieją punkty $x_0, x_1 \in [a,b]$ takie, że

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1) \quad \text{dla } x\in[a,b]$$



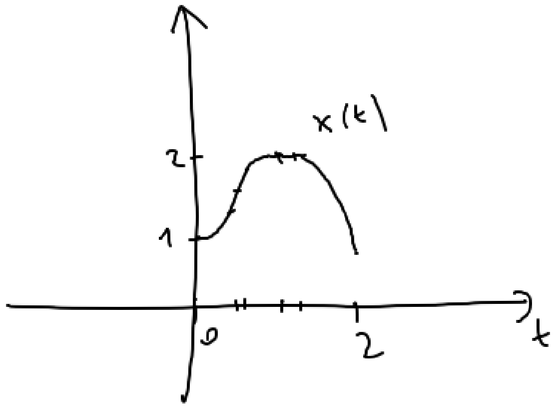


$f(x) = \frac{1}{x}$

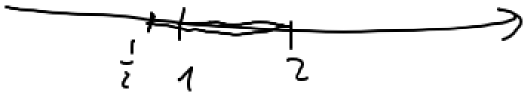
Pochodne

ruch cząstki na prostej

$x(t)=$ położenie cząstki w chwili t (na osi liczbowej)



$$\left(\begin{array}{c}\text{prędkość średnia cząstki w czasie} \\ \text{od } t_0 \text{ do } t_1 \\ (t_0<t_1)\end{array}\right) = \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$$



$$\underbrace{\left(\begin{array}{c}\text{prędkość chwilowa cząstki w} \\ \text{chwili } t_0\end{array}\right)}_{\text{ozn. } x'(t_0)} := \lim_{t_1\to t_0} \frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t}$$

pochodna funkcji x w punkcie t_0

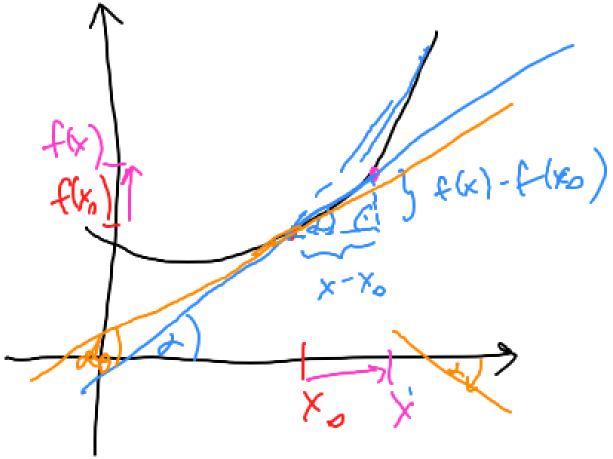
Def. Jeśli f jest określona w otoczeniu punktu x_0, to mówimy, że f ma pochodną w punkcie x_0, jeśli istnieje granica

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Jeśli ta granica jest skończona, to mówimy, że f jest różniczkowalna w punkcie x_0.

Geometrycznie:

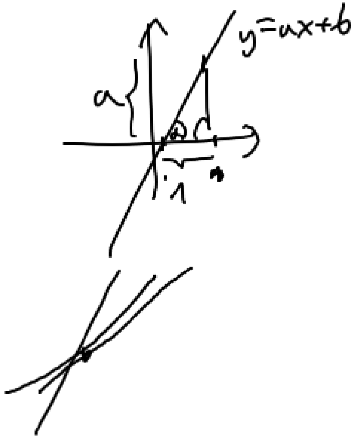
$f'(x_0)$ jest wsp. kierunkowym prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

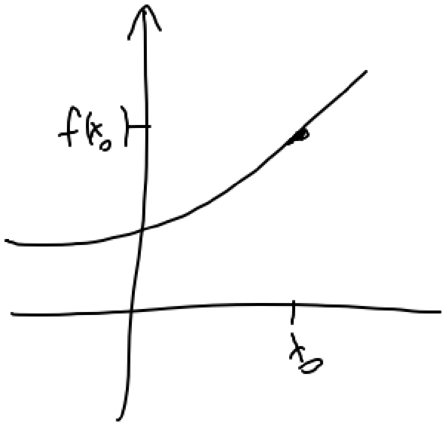
$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0)$$



Będziemy definiować prostą styczną za pomocą f':

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

– r-nie prostej stycznej do wykresu f w punkcie $(x_0, f(x_0))$



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Policzmy pochodną funkcji $f(x)=x^2$ w punkcie 3:

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3} (x+3) = 6.$$

czyli np. równanie stycznej do wykresu f w punkcie $(3,9)$:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3)$$

$$y - 9 = 6(x-3)$$

$$\underline{y = 9 + 6x - 18 = \underline{6x-9}}$$