Fakt. Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w pewnym $x_0\in(a,b)$ oraz istnieje $f'(x_0)$, to $f'(x_0)=0$.

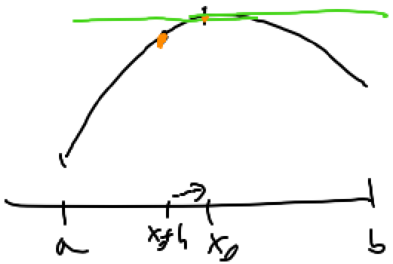
Dowód. Istnieje $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, istnieją więc też granice jednostronne.

Załóżmy, że w x_0 mamy maksimum lokalne. Wtedy

≤ 0 dla małych h

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\geq 0}\geq 0$$

<0



podobnie

≤ 0 dla małych h

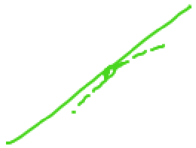
$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\leq 0}\leq 0$$

>0

$$\Longrightarrow\ 0\geq f'(x_0)\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0)=0.$$



$\boxtimes$

Fakt. Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła, to w pewnych punktach $[a,b]$ ma ekstrema lokalne. Każdy taki punkt, w którym jest ekstremum lokalne:

- jest końcem przedziału: $x_0 \in \{a,b\}$

lub

- jest punktem, w którym pochodna nie istnieje

lub

- jest punktem, dla którego $f'(x_0)=0$

Mówimy, że $f: D\to\mathbb{R}$ ma w x_0 maksimum (odp. minimum) globalne, jeśli

$$\forall_{x\in D}\ f(x)\le f(x_0) \quad \left(\text{odp. } \forall_{x\in D}\ f(x)\ge f(x_0)\right).$$

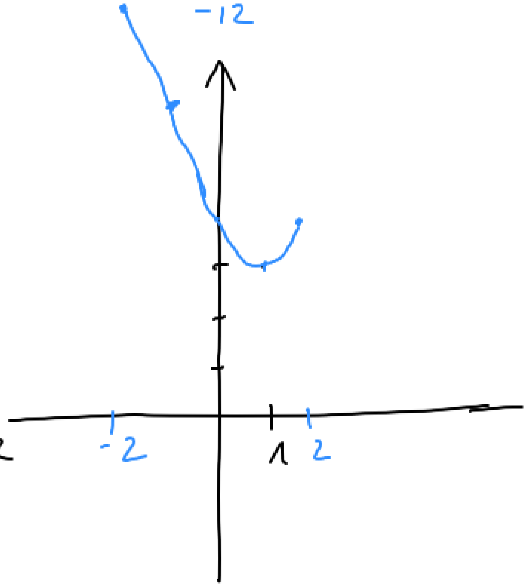
Mówimy, że w x_0 jest ekstremum globalne, jeśli w x_0 jest min lub max globalne.

Oczywiście jeśli w x_0 jest min (max) globalne, to jest tam też min (odp. max) lokalne.

Np. Znaleźć wartości najmniejsze i największe funkcji:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3$$

na przedziale $[-2,2]$.



Rozwiązanie: f jest ciągła na $[-2,2]$, więc z tw. W. ma wartości najmn. i najw., i z faktu są one przyjmowane w jednym z nast. punktów:

- końce przedziału: $f(-2) = 12$, $f(2) = 4$
- w punktach z $(-2,2)$, w których f' nie istnieje — takich punktów tu nie ma

$f'(x) = 2x - 2$ (wszędzie istnieje)

- w punktach z $(-2,2)$, w których $f' = 0$

$f'(x) = 2x - 2 = 0$ $\quad x - 1 = 0$, $x = 1$

$f(1) = 3$

Spośród tych wartości znajdujemy najmn. i najw.:

$$\underset{f(1)}{\overset{\shortparallel}{3}} \leq f(x) \leq \underset{f(-2)}{\overset{\shortparallel}{12}}, \quad x \in [-2,2]$$

Np. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x)=xe^{-x}$$

na przedziale $[-3,3)$.

$(gh)'=g'h+gh'$

$(g(y(x)))'=g'(y(x))\cdot y'(x)$

Rozw. f jest ciągła, więc wart. najmniejsza i największa są przyjmowane w jednym z nast. punktów:

wart. najmniejsza

· końce przedziału: $f(-3)=-3e^{3}$

$f(3)=3e^{-3}=3/e^{3}=\frac{1}{e}\cdot\frac{3}{e^{2}}$

wart. największa

· punkty, w $(-3,3)$ których f' nie istnieje — nie ma

· punkty z $(-3,3)$, w których $f'=0$:

$f(1)=1e^{-1}=\frac{1}{e}$

$$0=f'(x)=(x)'e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=1\cdot e^{-x}+x\cdot e^{-x}(-x)'=e^{-x}+xe^{-x}(-1)=$$
$$=e^{-x}(1-x)$$

f. złożona: $g(y)=e^{y}$, $y(x)=-x$ $\quad (e^{y})'=e^{y}$

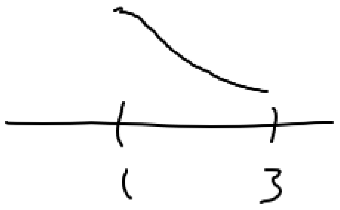
$\to x=1$

Inny sposób stwierdzenia, że $f(1) \geq f(3)$:

$$f'(x) = e^{-x}(1-x) < 0 \quad \text{dla } x > 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{czyli } f' < 0 \text{ na } (1,3) \\ f \text{ – ciągła na } [1,3] \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ jest (ściśle) malejąca na } [1,3]$$

$$\Rightarrow f(1) > f(3)$$



N1. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji

$$f(x) = e^{-x^2}\cdot(x-1)$$

na $\mathbb{R}$.

$$(e^y)' = e^y$$

$$\left(e^{y(x)}\right)' = e^{y(x)}\cdot y'(x)$$

Rozw.

$$f'(x) = \left(e^{\overset{y}{-x^2}}\right)'(x-1) + e^{-x^2}(x-1)' =$$

$$= e^{-x^2}\cdot\underbrace{(-x^2)'}_{-2x}(x-1) + e^{-x^2}\cdot 1 = e^{-x^2}\left(-2x^2+2x+1\right).$$

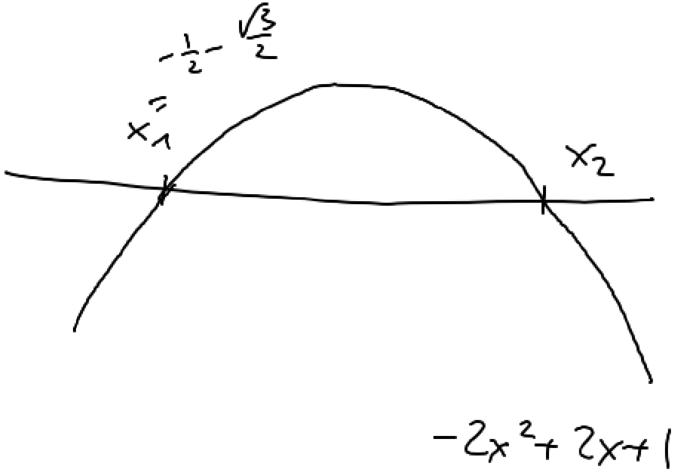
f' wszędzie istnieje, a więc ekstrema lokalne mogą być tylko w punktach, w których $f'=0$.

$$f'(x) = (-2x^2+2x+1)\underbrace{e^{-x^2}}_{>0} > 0 \quad \Big|\cdot e^{x^2}$$

$$-2x^2+2x+1 > 0$$

$$\Delta = 4+8 = 12$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$$

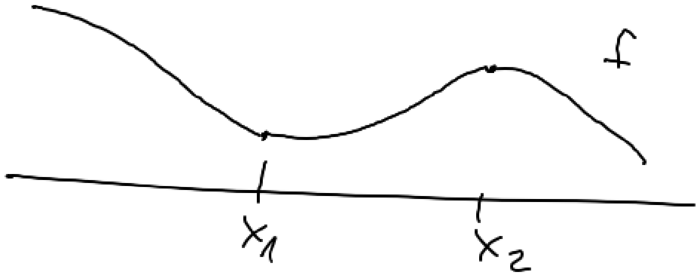


$f' > 0$ na $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$f' < 0$ na $\left(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i na $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$

$f' = 0$ punktach x_1, x_2

zbiór	f'	f	
$(-\infty, x_1)$	<0	malejąca	
x_1	$=0$		min. lokalne
(x_1, x_2)	>0	rosnąca	
x_2	$=0$		max lokalne
(x_2, ∞)	<0	malejąca	

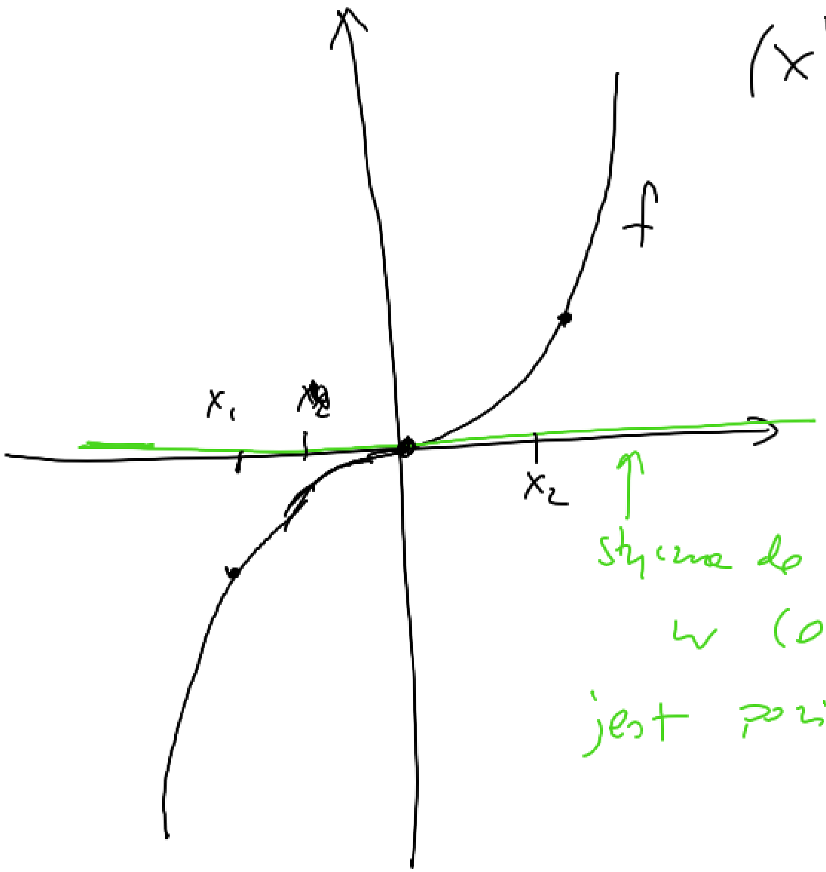


Np. $f(x)=x^3$ $\qquad (x^n)'=nx^{n-1}$

$f'(x)=3x^2$

$f'(0)=0$

ale f nie ma w zerze ekstremum lokalnego



styczna do wykresu f w $(0,0)$ jest pozioma

$f'>0$ na $(-\infty,0)$
i na $(0,\infty)$ $\Rightarrow f \nearrow$ na $(-\infty,0]$ oraz na $[0,\infty)$

$\Rightarrow f \nearrow$ na $\mathbb{R}$ (jeśli $x_1<0, x_2>0$, to $f(x_1)<f(0)<f(x_2)$)

Znaleźć przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = x^3 - x^2 - x + 4$ na $\mathbb{R}$.

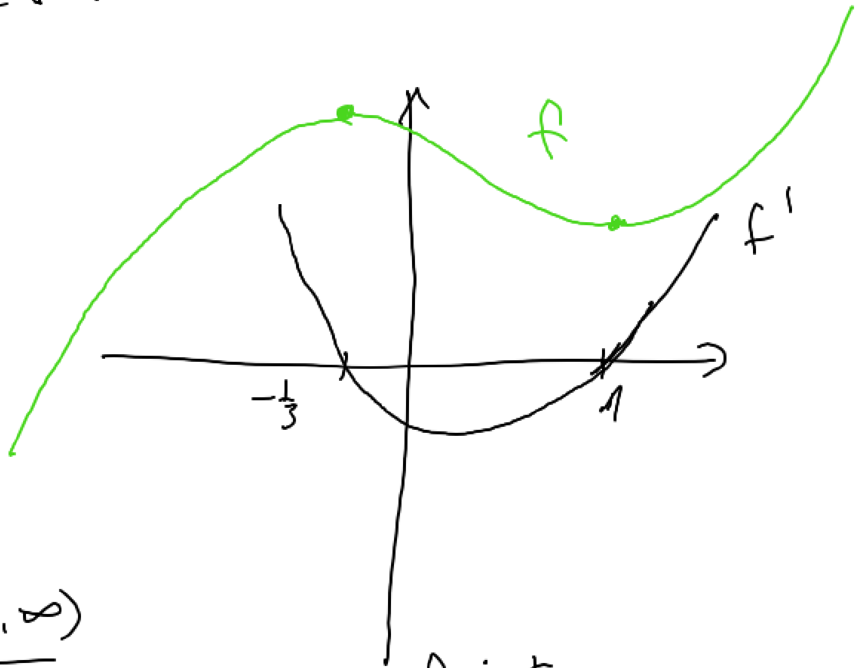
Rozw.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 4}{6}, \quad x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = 1$$

	$(-\infty, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, 1)$	1	$(1, \infty)$
f'	>0	$=0$	<0	$=0$	>0
f	rosnące ↗	max lok.	malejące ↘	min lok.	rosnące ↗



Odp: f jest rosnąca na $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ i na $[1, \infty)$, malejąca na $[-\frac{1}{3}, 1]$ ...