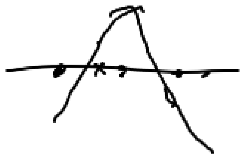
$(gh)' = g'h + gh'$



Nr. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji:

$$f(x) = (x+1)e^{-|x|}$$

na odcinku $[-3,3]$.

Rozw. f jest ciągła (w skrócie: cg.) na $[-3,3]$. Wobec tego wartości najmniejsza i największa istnieją (to wynika z tw. Weierstrassa) oraz są przyjmowane w jednym z nast. punktów:

- końce odcinka: $\boxed{f(-3) = -2e^{-3}}$, $\boxed{f(3) = 4e^{-3}}$

  dodatkowo, $\frac{4}{e^3} < 2$, więc $f(0)=2$ jest wart. największą

  $(|x|)^2 = x^2$

- punkty, w których pochodna nie istnieje: $\boxed{f(0) = 2}$

  (w zasadzie nie wiemy, czy $f'(0)$ istnieje, czy nie, jednak zamiast badać jej istnienie łatwiej policzyć $f(0)$ i porównać z innymi wartościami w „podejrzanych" punktach)

- punkty $x \in (-3,3)\setminus\{0\}$, w których $f'(x)=0$

  dla $x>0$: $f(x) = (x+1)e^{-x}$

  $$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x+1)\cdot e^{-x}\cdot(-x)' = e^{-x}(1-1-x) = e^{-x}\cdot(-x) \neq 0 \text{ dla } x>0$$

· dla $x < 0$

$f(x) = (x+1)e^x$

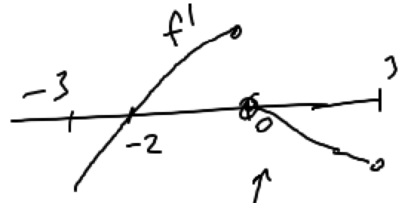
$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1)(e^x)' = e^x(x+2)$

$f'(x) = 0 \iff x = -2$

$\boxed{f(-2) = -1e^{-2}}$ ← najmniejsza wartość

$f' < 0$ na $(-3,-2)$

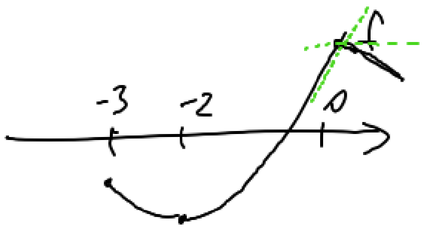
$f' > 0$ na $(-2,0)$



(f' w 0 nie istnieje)

$f(-3) = -2e^{-3} \;\cancel{<}\; > \; -e^{-2} = f(-2) \quad \Big| \cdot (-1)e^2$

$2e^{-1} \;\cancel{>}\; < \; 1$



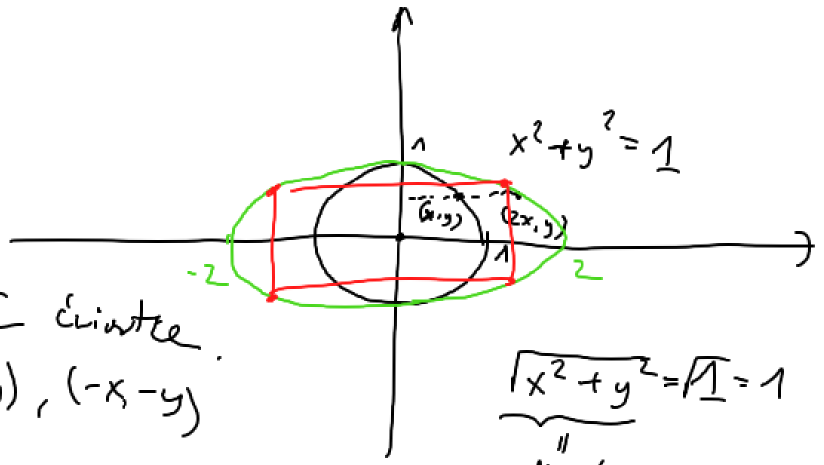
$f(-3) > f(-2)$

Odp: najmn. wartość: $f(-2) = \frac{-1}{e^2}$

najw. wartość $f(0) = 2$

Nr. Rozważamy prostokąty o bokach równoległych do osi układu współrzędnych i wierzchołkach leżących na elipsie $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1.$

Który z takich prostokątów ma największe pole?



$\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\substack{\shortparallel \\ \text{odl. } (x,y) \text{ od } (0,0)}} = \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$

Niech prostokąt ma wierzchołek (x,y) leżący na elipsie w I ćwiartce.

Wtedy pozostałe wierzchołki to będą punktami: $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$

Zatem pole $= 2x \cdot 2y = 4xy$

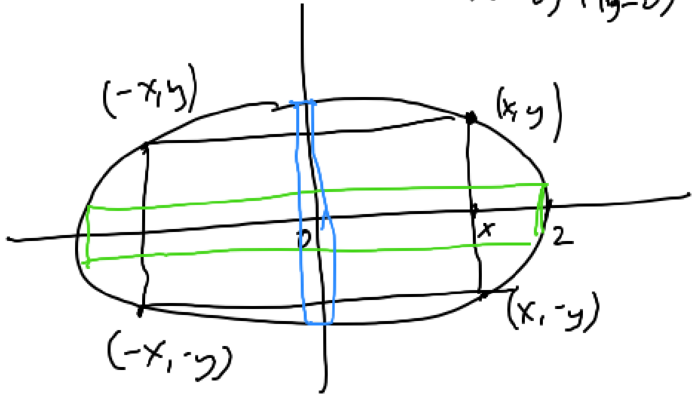
Wiemy, że $x,y \geq 0$ oraz $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4}$$

$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad (\text{bo } y \geq 0)$$

$x \in [0,2)$ (bo x leży na elipsie i w I ćwiartce)

$$\text{pole}(x) = 4x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$



Zadanie sprowadza się do znalezienia wartości największej funkcji

$$\text{pole}(x) = 4x\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$$

na odcinku $[0,2]$. Ta funkcja jest ciągła, więc ma wartość największą (tw. W.), która jest przyjmowana w jednym z nast. punktów:

- końce odcinka: $\text{pole}(0)=0$, $\text{pole}(2)=0$

$$(4x)' = 4\cdot(x)' = 4\cdot 1 = 4$$

$$(\sqrt{y})' = \left(y^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

- punkty $x\in(0,2)$, w których $\text{pole}'(x)=0$:

$$\text{pole}'(x) = (4x)'\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 4x\cdot\underbrace{\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)'}_{f(g(x))} = 4\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 4x\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{4}\right)'}_{=\,-\frac{x}{2}} =$$

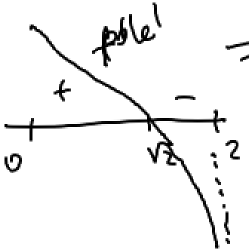
$f(x)=\sqrt{x}$ $\quad g(x) = 1-\frac{x^2}{4}$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

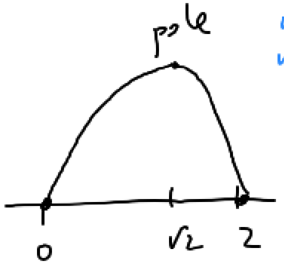
$$= \frac{4\left(1-\frac{x^2}{4}\right) + 4x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = 0 \iff x=\sqrt{2}$$

$$\text{pole}(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{2}{4}} = 4$$

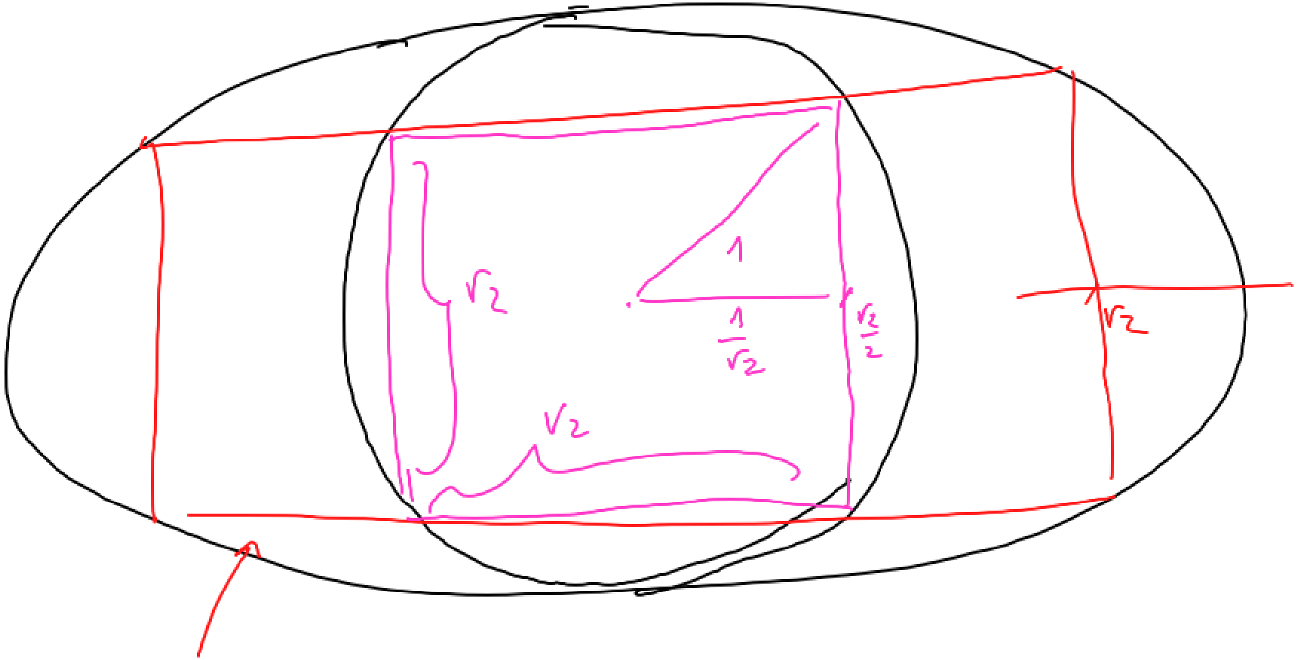
wart. najw.



$\Rightarrow$



Rozwiązanie geometryczne



kurczymy 2x w poziomie i otrzymujemy prostokąt wpisany w okrąg

o 2x mniejszym polu

prostokątem wpisanym w okrąg $x^2+y^2=1$
o maksymalnym polu jest kwadrat o boku dług. $\sqrt{2}$ i polu 2

Reguła de l'Hôspitala

Np. dla $\lim_{x\to\infty}$: zmiany na zielono

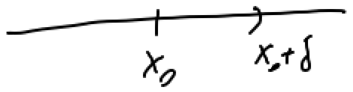
Tw. Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Załóżmy, że f i g są określone przynajmniej na $(x_0, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ oraz że są tam różniczkowalne. Załóżmy ponadto, że:

(x_0, ∞)

- $\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ \infty}} f(x)=0$, $\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ \infty}} g(x)=0$

lub

- $\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ \infty}} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ \infty}} g(x)=\pm\infty$ (niekoniecznie granice są takiego samego znaku)



Wówczas jeśli istnieje granica $\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to również istnieje granica $\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ \infty}} \frac{f(x)}{g(x)}$ i te granice są sobie równe.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Np.

$$(*)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\sin(2x)}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}}$$

$f(x) = \sin 2x$, $g(x) = x$ — różniczkowalne na $\mathbb{R}$

Spróbujmy policzyć granicę

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin 2x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(2x)\cdot(2x)'}{1} = \lim_{x\to 0^+} \cos(2x)\cdot 2 = 2$$

Granica ta istnieje, wnioskujemy więc (z reguły de l'H.), że również granica $(*)$ istnieje i $=2$.

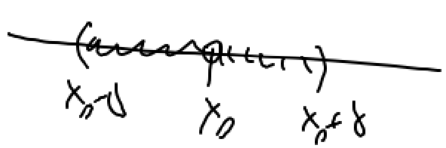
Zwykle zapisujemy takie rozumowanie krócej:

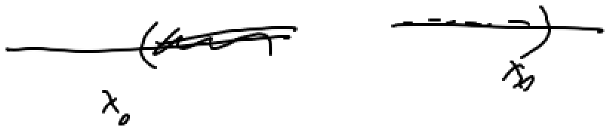
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin 2x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} 2\cos 2x = 2$$

Zapis „$\underset{H}{=}$" oznacza, że jeśli granica po prawej stronie istnieje, to „$\underset{H}{=}$" staje się równością — jeśli zaś nie istnieje, to „$\underset{H}{=}$" nie pozwala wyciągnąć żadnych wniosków nt. lewej strony.

Reguła de l'Hôspitala ma też wersję dla granic lewostronnych, obustronnych oraz granic w $\pm\infty$.

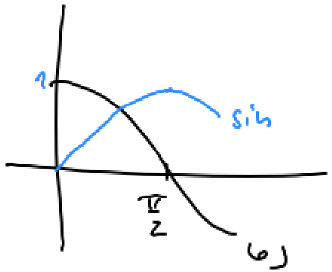
Zmiany	zastępujemy przez			
jest		lub	lub	lub
f, g są określone przynajmniej na $(x_0, x_0+\delta)$	... na $(x_0-\delta, x_0)$	... na $(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$	... na (x_0, ∞)	... na $(-\infty, x_0)$
$\lim\limits_{x\to x_0^+}$	$\lim\limits_{x\to x_0^-}$	$\lim\limits_{x\to x_0}$	$\lim\limits_{x\to \infty}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}$





Np.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)'}{(2x-\pi)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{2} = \frac{-1}{2}$$



Odp: $-\frac{1}{2}$.

Np.

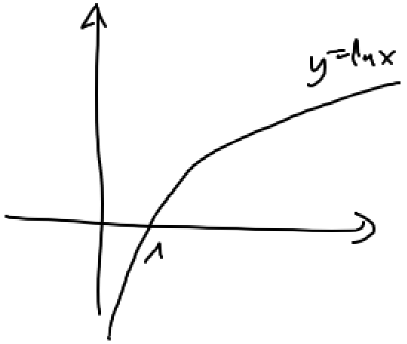
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x-1)'}{\underbrace{\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\right)'}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \ldots = -\frac{1}{2}$$

$f(g(x))$, $f(x)=x^2$ $\quad f'(x)=2x$

$g(x)= x-\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{2x^2}_{\to\infty}} = 0$$



$$\lim_{x\to\infty} \left(\underbrace{x^{2021}}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{2021}}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2021 \cdot x^{2020}}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2021 \cdot 2020 \cdot x^{2019}}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \cdots$$

$$\cdots \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2021 \cdot 2020 \cdots 2 \cdot x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{2021 \cdot 2020 \cdots 2 \cdot 1}^{=2021!}}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2021}}{e^x} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to\infty}{x}}{\underset{\downarrow\,\infty}{e^{\frac{x}{2021}}}}\right)^{2021} \overset{H}{\underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \left(\lim_{x\to\infty} \frac{\overset{\to 1}{1}}{\underset{\swarrow\,\infty}{e^{\frac{x}{2021}}}\cdot \frac{1}{2021}}\right)^{2021} = 0^{2021} = 0.$$

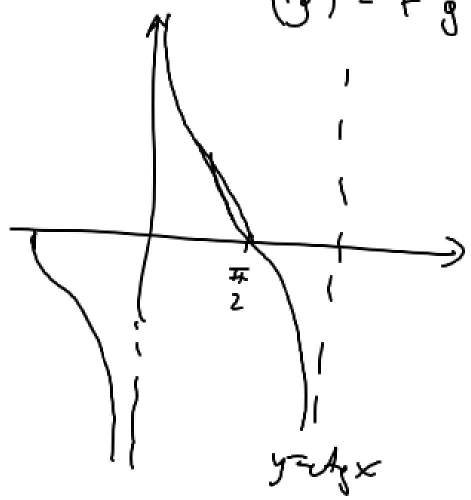
pochodna $\frac{x}{2021}$

Można było też zapisać tak:

$$\lim_{x\to\infty} x^{2021} e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{x^{-2021}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{(H)}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{(-2021)\, x^{-2022}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \dots$$

to jest ślepa uliczka

$(fg)' = f'g + fg'$



$$\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{ctg}x - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\infty}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{(x\cos x - \sin x)'}{(x\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{1\cdot\cos x} + x(-\sin x) - \cancel{\cos x}}{1\cdot\sin x + x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\sin x}{\sin x + x\cos x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-1\sin x - x\cdot\cos x}{\cos x + \cos x + x(-\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sin x - x\cos x}{\underbrace{2\cos x}_{2} - \underbrace{x\sin x}_{0}} = \frac{0}{2} = 0$$

|| inny sposób

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{-\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} + \underbrace{\cos x}_{1}} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{(2^x - \cos x)}^{\to 0}\cdot \overbrace{e^{x^2+4x-7}}^{\to e^{-7}}}{\underbrace{x}_{0}\cdot \underbrace{\ln(x^2+5)}_{\ln 5}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{H}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left((2^x-\cos x)\cdot e^{x^2+4x-7}\right)'}{\left(x\ln(x^2+5)\right)'} = \text{(długotrwałe rachunkowo)}$$

$$= \frac{e^{-7}}{\ln 5}\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x-\cos x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{H}{=}} \frac{e^{-7}}{\ln 5}\lim_{x\to 0^+}\frac{2^x\ln 2+\sin x}{1} = \frac{e^{-7}}{\ln 5}(\ln 2+0).$$