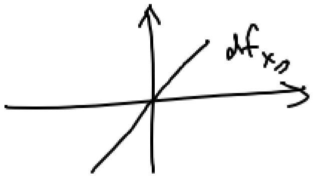
Różniczka

jeśli f ma pochodną w punkcie x_0, to różniczką f w punkcie x_0 nazywamy funkcję liniową określoną wzorem

$$df_{x_0}(t) = f'(x_0)\cdot t$$

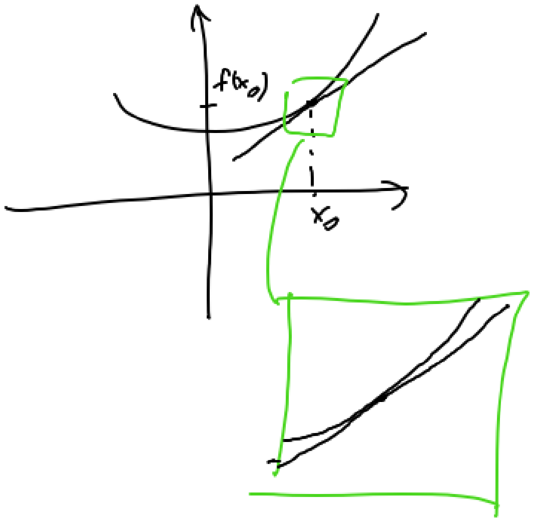


r-nie stycznej do wykresu f w punkcie x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

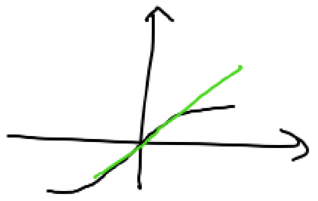


pisząc $\Delta x = x - x_0$:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x = f(x_0) + df_{x_0}(\Delta x) \quad \text{dla } x \approx x_0$$

Np. $(\sin x)' = \cos x$

$\sin x \approx \sin 0 + \cos 0 \cdot x = x$ dla $x \approx 0$



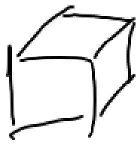
Jeśli pewną wielkość X zmierzymy (jako x_0) z błędem (bezwzględnym) Δx (tzn. $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$),

Np. $x = 35\,mm \pm 1\,mm$ $\quad x_0 = \underline{35}$ $\quad \Delta x = \underline{1}$ $\quad [mm]$

to jaki będzie błąd (bezwzględny) dla $f(x)$, jeśli przyjmiemy tę wartość $f(x_0)$?

Np. kostka (sześcian) o boku x, jaką ma objętość?

$$V(x) = x^3$$



Ten błąd (w przybliżeniu) jest równy $f'(x_0)\Delta x$, a więc co do modułu jest

$$|\Delta f(x_0)| \leq |f'(x_0)| \cdot |\Delta x| = 3675 \cdot 1 \quad [mm^3]$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}$$

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

Np. $V' = 3x^2$, $V'(x_0) = 3 \cdot 35^2 = 3675$

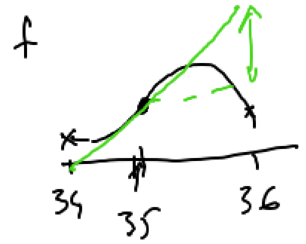
Błąd względny: $$\frac{|\Delta f(x_0)|}{|f(x_0)|} \le \frac{3x_0^2 \cdot \Delta x}{x_0^3} = 3 \cdot \frac{\Delta x}{x_0}$$

błąd względny pomiaru x

Tutaj błąd bezwzględny można by oszacować prościej:

$$V \approx 35^3 \ [mm^3]$$

$$34^3 = (35-1)^3 \le V \le (35+1)^3 = 36^3$$



Pochodne wyższych rzędów

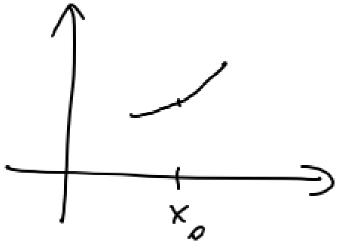
f na odcinku otwartym I

Jeśli f' istnieje na I, to $f': I \to \mathbb{R}$; jeśli f' ma pochodną w punkcie $x_0 \in I$, to mówimy, że f ma drugą pochodną w x_0, ozn. $(f')'(x_0) =: f''(x_0)$.

Itd.

$$f'''(x_0) = (f'')'(x_0)$$

$$f^{IV}(x_0) = (f''')'(x_0)$$



$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \text{przyjmujemy } f^{(0)} = f$$

$n=1$: $\quad f^{(1)}(x_0) = \left(f^{(0)}\right)'(x_0) = f'(x_0)$

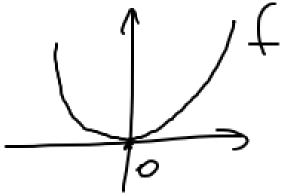
$n=2$: $\quad f^{(2)}(x_0) = \left(f^{(1)}\right)'(x_0) = (f')'(x_0) = f''(x_0)$ $\quad$ itd.

Fakt.

Jeśli $f: I \to \mathbb{R}$ ma pochodną na I, $x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0$, to:

- jeśli $f''(x_0) > 0$, to f ma w x_0 min. lokalne
- jeśli $f''(x_0) < 0$, -"- max lokalne

Np. $f(x) = x^2$



$f'(x) = 2x$

$f'(0) = 0$

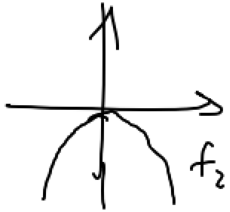
$f''(0) > 0$ } $\Rightarrow$ f ma w 0 min lokalne

$f''(x) = (2x)' = 2 > 0$

Np. $f_2(x) = -x^2$

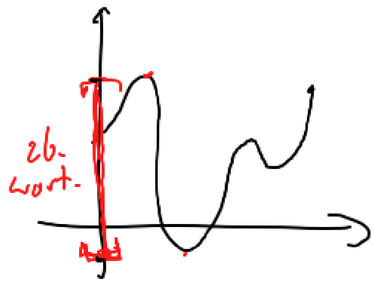
$f_2'(x) = -2x$ $\quad f_2'(0) = 0$

$f_2''(x) = (-2x)' = -2 < 0$ $\quad f_2''(0) < 0$ } $\Rightarrow$ f_2 ma w 0 max lokalne



• Znaleźć zbiór wartości funkcji $f(x) = \cos 2x - 2\sin x$, $x \in [0,\pi]$. f jest ciągła.

Z tw. Darboux i Weierstrassa wynika, że jeśli $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to zbiorem wartości f jest



$$f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\} = [m, M],$$

gdzie $m = f(x_0)$ jest najmniejszą wartością f na $[a,b]$,

$M = f(x_1)$ -||- największą -||- ______ .

$$\underset{m}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}} \le f(x) \le \underset{M}{\overset{\shortparallel}{f(x_1)}} \quad \text{dla } x \in [a,b]$$

Musimy znaleźć wart. najmniejszą i największą f na $[0,\pi]$.

Wartości najmn. i największa są przyjmowane w jednym z punktów postaci:

$f(x) = \cos 2x - 2\sin x$

- końce odcinka: $f(0) = 1 - 0 = \boxed{1}$ ← wart największa
  $f(\pi) = 1 - 0 = \boxed{1}$

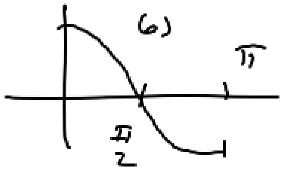
- punkty $(0,\pi)$, w których pochodna nie istnieje lub się zeruje:
  (takich punktów nie ma)

$$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2 - 2\cos x = -2(\sin 2x + \cos x) = -2(2\sin x\cos x + \cos x) =$$

$$= -2\cos x\,(2\sin x + 1)$$

x: $\cos x = 0$ lub $\sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{2}$ takich punktów nie ma w $[0,\pi]$



$f(\frac{\pi}{2}) = -1 - 2 = \boxed{-3}$ ← wart. najmniejsza

$\Rightarrow$

$-3 = f(\frac{\pi}{2}) \le f(x) \le f(0) = 1$

zb. wartości jest $[-3, 1]$

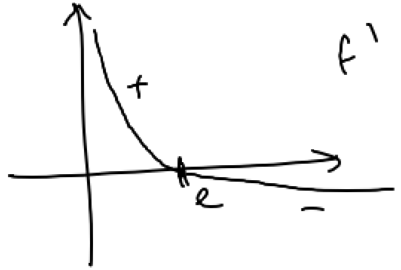
W sytuacji, gdy $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $-\infty\le a<b\le\infty$ jest ciągła, to zbiorem wartości też jest pewien przedział.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Np. $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x\in(0,\infty)$

f jest ciągła

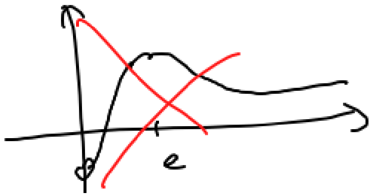
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} \begin{cases} >0, & x\in(0,e) \\ =0, & x=e \\ <0, & x\in(e,\infty) \end{cases}$$

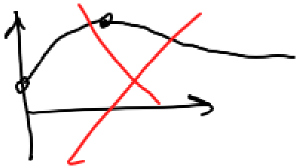


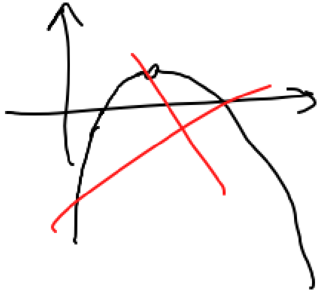
$\Rightarrow$ f jest rosnąca na $(0,e]$

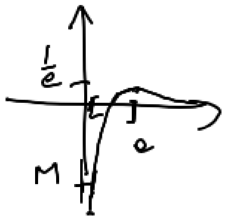
f jest malejąca na $[e,\infty)$

$f(e)=\frac{1}{e}$









$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$\Rightarrow$ zb. wartości $f = \left(-\infty, \frac{1}{e}\right]$

Niech $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ - odcinek

Def. Mówimy, że $F: I \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji f na odcinku I, jeśli:

a) F jest ciągła

oraz

b) F' istnieje wewnątrz I oraz $F' = f$ wewnątrz I.

Np.: $f(x) = x$ na $(-3,5)$

$F(x) = \frac{x^2}{2}$, $x \in (-3,5)$ jest f. pierwotną funkcji f

Spr.: a) F jest ciągła

b) F' istnieje, $F'(x) = \frac{2x}{2} = x = f(x)$ na I

(Tak jest na każdym odcinku, nie tylko $(-3,5)$).

Np:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{na } [0,1]$$
$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

wtedy $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$ jest f. pierwotną f na $[0,1]$:

$$\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$$

a) F jest ciągła na $[0,1]$

b) dla $x \in (0,1)$

$$F'(x) = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Ale również $G(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + 7$ też jest f. pierwotną f na $[0,1]$:

a) G jest cg. na $[0,1]$

b) dla $x \in (0,1)$: $G'(x) = \left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right)' + (7)' = \sqrt{x} + 0 = \sqrt{x}$

Fakt. Niech $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ – odcinek, niech $F: I \to \mathbb{R}$ będzie f. pierwotną funkcji f. Wówczas

$$\left(G: I \to \mathbb{R} \text{ jest funkcją pierwotną } f \right) \iff \left(G - F = \text{const.} \right)$$

Dd. $\Leftarrow$ Jeśli $G = F + c$, to G jest ciągła na I oraz na wnętrzu I: $G' = F' + (c)' = F' = f$. Zatem G istotnie jest f. pierwotną f.

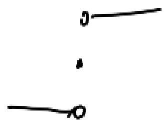
$\Rightarrow$ Załóżmy, że G jest f. pierwotną f. Wtedy $h = G - F$ jest ciągła na I oraz

$h'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ dla x wewnątrz I.

Z wniosku z tw. Lagrange'a $h = \text{const.}$

$\boxtimes$

Fakt. Jeśli $f: I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to ma funkcję pierwotną na I.

sgn  nie ma funkcji pierwotnej

Oznaczenie: Jeśli $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ - odcinek, $F: I \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną f,

(a,b)
$(a,b]$ $[a,b)$, $[a,b]$

to kładziemy

$$\int f(x)\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$ – rodzina wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f

całka nieoznaczona funkcji f (na odcinku I)

Np.

$$\int x\,dx = \{\underbrace{\tfrac{x^2}{2} + c}_{\substack{\text{funkcje kwadratowe} \\ \text{(nie całkiem poprawna} \\ \text{notacja)}}} : c \in \mathbb{R}\} = \{\underbrace{I \ni x \mapsto \tfrac{x^2}{2} + c}_{\substack{\text{funkcja } g \text{ t.że} \\ g(x) = \frac{x^2}{2} + c,\ x \in I}} : c \in \mathbb{R}\} = \underbrace{\frac{x^2}{2} + c}_{\substack{\text{(jeszcze mniej} \\ \text{poprawna} \\ \text{notacja)}}}$$

Np.

$$\int x\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2} + c} = \underbrace{\frac{x^2}{2} + 1 + c'}$$

Mamy

$$\int (f(x)+g(x))\,dx \overset{*}{=} \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Niech F, G będą pewnymi funkcjami pierwotnymi f, g, odpowiednio.

$$\int f(x)\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\} \qquad \int g(x)\,dx = \{G + c : c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\} + \{G + d : d \in \mathbb{R}\} \overset{\text{z def.}}{=}$$

$$= \{(F+c) + (G+d) : c, d \in \mathbb{R}\} = \{F + G + (c+d) : c, d \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{F + G + c_2 : c_2 \in \mathbb{R}\} \overset{*}{=} \int (f(x)+g(x))\,dx$$

Funkcją pierwotną $(f+g)$ jest $(F+G+c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ – dow. stała.

Np.

$$\int (x+\sqrt{x})\,dx = \int x\,dx + \int \sqrt{x}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+c\right) + \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c'\right) =$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2} + \underbrace{(c+c')}_{\text{nowa stała } c''} = \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2}}\, + c''$$

wygodniej jest pisać najpierw pełne f. pierwotne x, $\sqrt{x}$ (odp.), a na koniec dodać stałą

$$\underbrace{= \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^{3/2}}_{\text{pełna f. pierw. funkcji } x\mapsto x+\sqrt{x}} + C}_{\text{dowolna f. pierwotna funkcji } x\mapsto x+\sqrt{x}}$$

Np.:

$$\int (\sin x + x^3)\,dx = \int \sin x\,dx + \int x^3\,dx = -\cos x + \frac{1}{4}x^4 + C =$$

$$= \left\{ x \mapsto -\cos x + \frac{1}{4}x^4 + C \;:\; C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(-\cos x)' = \sin x$$

Nie wyspecyfikowaliśmy powyżej odcinka I.

Domyślnie chodzi więc o pewien odcinek I zawarty w dziedzinie naturalnej funkcji, które powyżej występują.

Może więc wziąć $I = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

$$(x^n)' = n\underbrace{x^{n-1}}_{x^3}$$

$n = 4$:

$$(x^4)' = 4\underbrace{x^3}$$

$$\left(\frac{1}{4}x^4\right)' = x^3$$

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $\cancel{(\;)\cup(\;)}$ 0