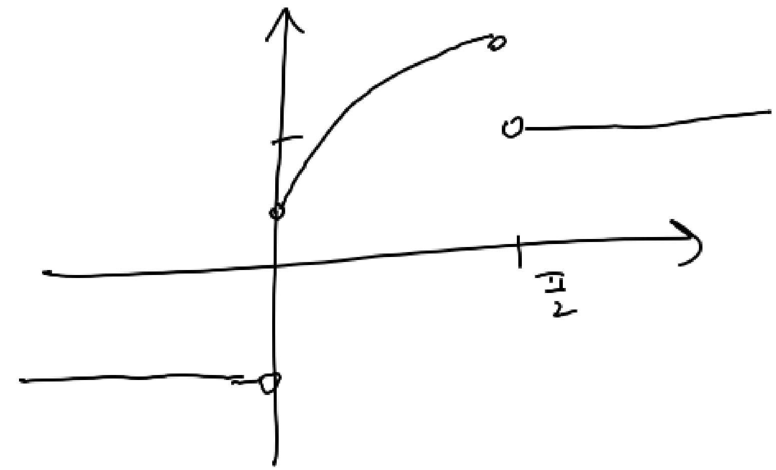
37 Dobrać $a, b \in \mathbb{R}$ tak, żeby f była ciągła na $\mathbb{R}$:

a) $$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0 \\ a + b\sin x & \text{dla } 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{dla } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$f(-3) = -1$

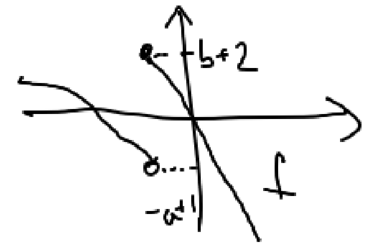
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = a + b\sin\frac{\pi}{4}$

$f(7) = 1$

było

b)

$$f(x)=\begin{cases} \frac{a}{x}+1 & \text{dla } x<-1 \\ b-2x & \text{dla } x\geq -1 \end{cases}$$



- f jest ciągła na $(-\infty,-1)$ oraz na $(-1,\infty)$, bo na każdym z tych przedziałów otwartych jest to funkcja elementarna

- f cg. w -1 ? $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(\frac{a}{x}+1\right) = -a+1$$

tzn. że $x\to -1$, $x<-1$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(b-2x) = b+2$$

tzn. że $x\to -1$, $x>-1$

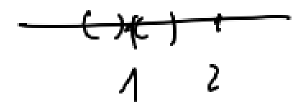
$f(-1)=b+2$

$\Rightarrow$ (f - cg. w -1 $\Leftrightarrow$ $-a+1=b+2$)

Np. $a=1$, $b=-2$.

38

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} & \text{dla } x\neq 1,\ x\neq 2 \\ 1 & \text{dla } x=1 \\ \dfrac{1}{4} & \text{dla } x=2 \end{cases}$$

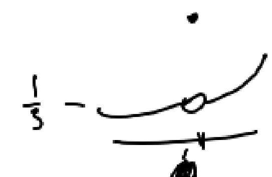


$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Nieciągłość może być tylko w 1 lub w 2.

dla $x\neq 1, x\neq 2$:

$$f(x)=\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{x+2}$$



$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} \neq f(1)$$ nieciąg. w 1 (luka)

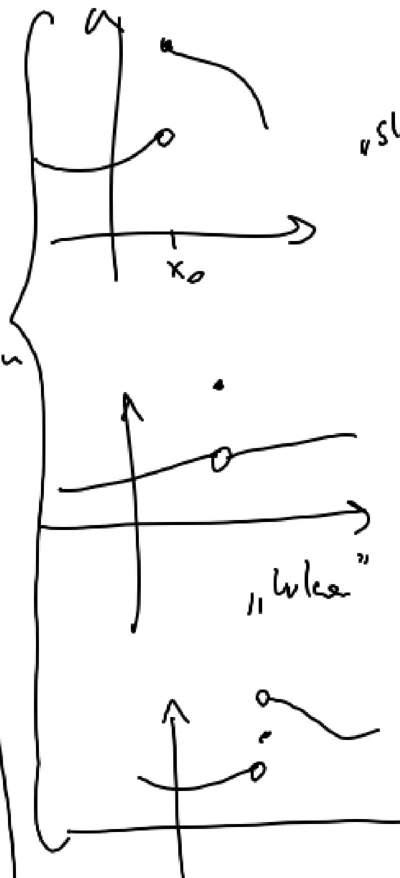
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} = f(2)$$ w 2 jest ciąg.

Nieciąg. w x_0:

II rodzaju

nie istnieje granica w x_0

I rodzaju

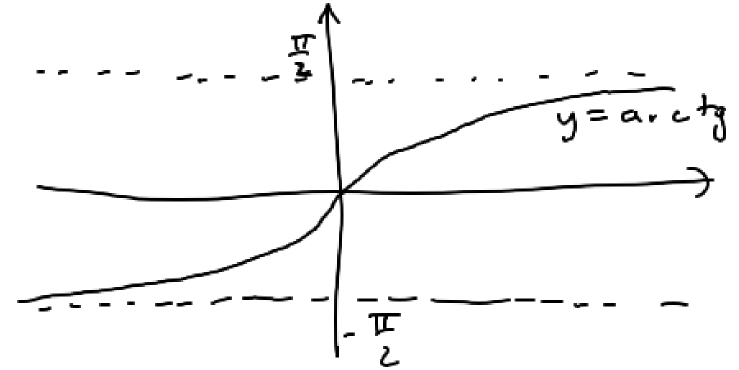


„skok"

„luka"

II rodzaju (gr. jednostr. $\pm\infty$)

b) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$



f jest ci. na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

D: $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$

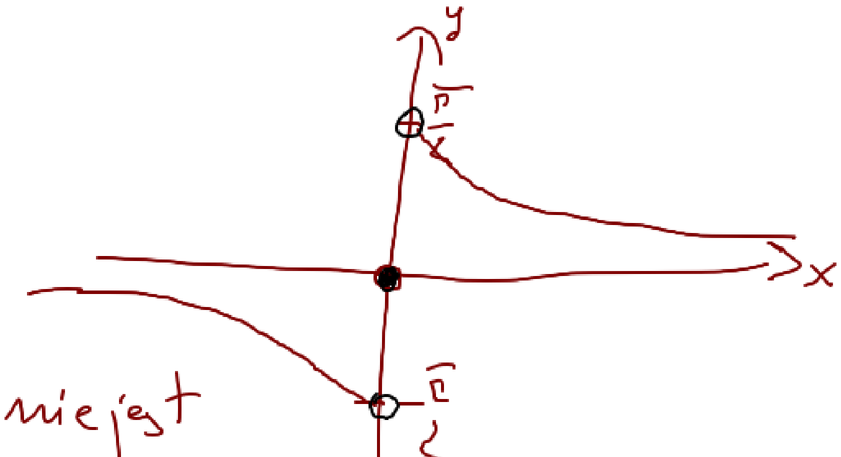
$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\pi}{2}\neq 0$

$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}\neq 0$

$\Rightarrow$ f(x) nie jest ciągła w 0

(nieciąg. typu „skok")



b)

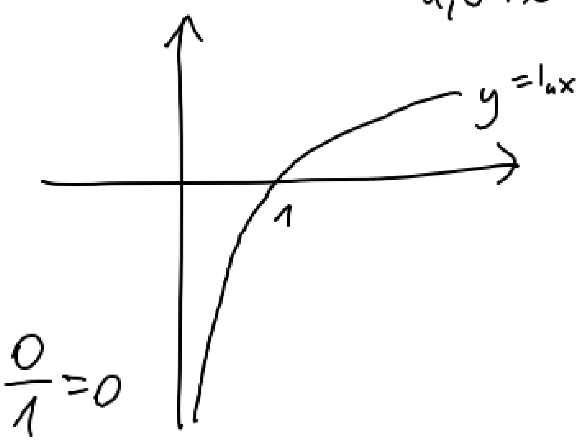
$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\ln(x^2)-\ln(x^2+1)} & \text{dla } x\neq 0 \\ 0 & \text{dla } x=0 \end{cases}$$

f jest ciąg. na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, bo jest elementarna na $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x^2)-\ln(x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\underbrace{\ln \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}}_{\to 0^+}}_{\to -\infty}} = 0$$

$\ln(a)-\ln(b)=\ln\frac{a}{b}$

$a,b>0$



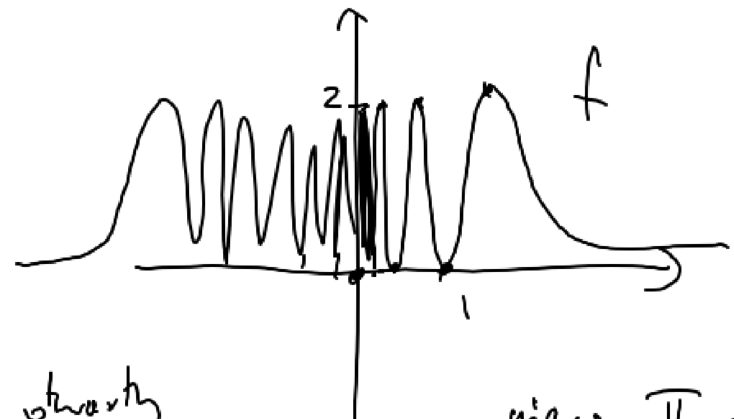
$$\lim_{x\to 0}\frac{\overset{\to 0}{x^2}}{\underbrace{\underset{\to 0}{x^2}+1}_{\to 1}} = \frac{0}{1} = 0$$

$\frac{x^2}{x^2+1} > 0$ dla $x\neq 0$

f jest ciągła w zerze

$\Rightarrow f$ jest ciągła na $\mathbb{R}$

d) $$f(x)=\begin{cases}1-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$



niecg. II rodzaju

f jest cg. na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, bo elementarna

i $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ jest otwarty

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nie istnieje

Skorzystamy z def. Heinego i skonstruujemy dwa ciągi:

$0\neq x_n\to 0$ t.że $f(x_n)\to a$

$\neq$

$0\neq y_n\to 0$ t.że $f(y_n)\to b$

np. $\frac{1}{x_n}=2n\pi$

$x_n=\frac{1}{2n\pi}\to 0$

$f(x_n)=1-\cos\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}=1-\cos 2n\pi=0 \to 0$

np. $\frac{1}{y_n}=\pi+2n\pi$

$y_n=\frac{1}{\pi+2n\pi}\to 0$

$f(y_n)=1-\cos(\pi+2n\pi)=2\xrightarrow[n\to\infty]{}2$

33

$\cancel{x(x+6)}$ $(x+3)^2-11$

a) $x^2+6x-2=0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie w $[0,1]$

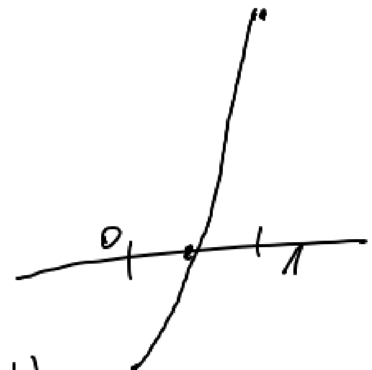
$f(x)=x^2+6x-2$, $x\in[0,1]$

f jest ciągła na $[0,1]$,

$f(0)=-2$

$f(1)=5$

$f(0)f(1)<0$



Zatem z tw. Darboux istnieje $c\in(0,1)$ takie, że $f(c)=0$.

Z drugiej strony, f jest rosnąca na $[0,1]$:

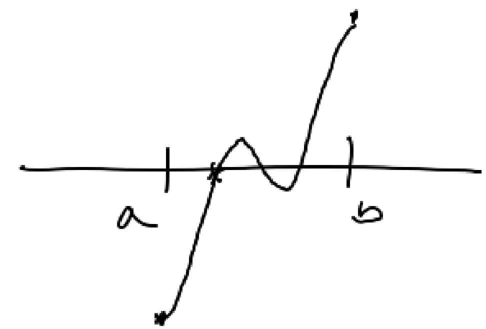
jeśli $0\le x_1<x_2\le 1$, to

$$x_1^2<x_2^2$$
$$6x_1<6x_2 \quad \Big|+$$
$$x_1^2+6x_1<x_2^2+6x_2 \quad \Big|-2$$
$$f(x_1)<f(x_2).$$

Wobec tego f jest ściśle rosnąca, a więc istnieje co najwyżej jedno $c\in(0,1)$ t.że $f(c)=0$

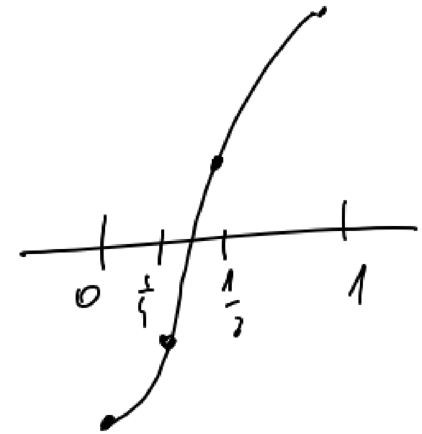
Tw. Darboux

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cg. i $f(a)f(b)<0$, to istnieje $c\in(a,b)$ t.że $f(c)=0$.



Wiemy, że rozwiązanie c jest $\in (0,1)$

$\rightsquigarrow \quad c = 0{,}5 \pm 0{,}5$



$f(x) = x^2 + 6x - 2$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 3 - 2 > 0 \qquad f(0)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

$f(0) = -2$

z tw. Darboux rozwiązanie istnieje w $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

$c = 0{,}25 \pm 0{,}25$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} + \frac{3}{2} - 2 < 0 \qquad f\left(\frac{1}{4}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

$\Rightarrow c \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$c = 0{,}375 \pm 0{,}125$

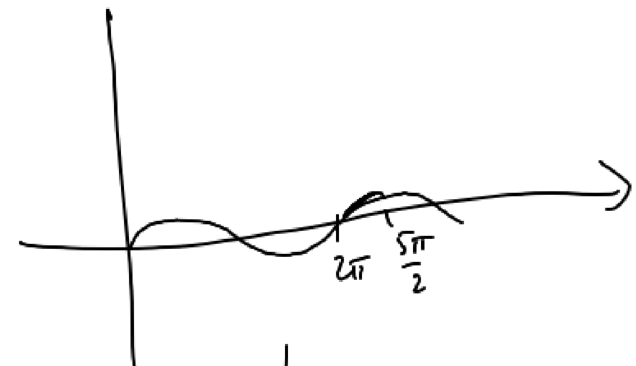
b) $x \sin x = 7$ na $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$

$f(x) = x \sin x - 7$

f jest cg. na $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$, $f(2\pi) = 2\pi \sin(2\pi) - 7 = -7 < 0$

$f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2} \sin \frac{5\pi}{2} - 7 = \frac{5\pi}{2} - 7 > 7{,}5 - 7 > 0$

z tw. Darboux istnieje $c \in \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ takie, że $f(c) = 0$. $f(2\pi) \cdot f\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0$



sin jest ↗ na $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$ i ma wart. ≥ 0

x —"— ↗ —"— ma wart. > 0

jeśli $2\pi \leq x_1 < x_2 \leq \frac{5\pi}{2}$, to $\sin x_1 < \sin x_2 \quad | \cdot x_1$

~~f(x1)~~ $x_1 \sin x_1 < x_1 \sin x_2 < x_2 \sin x_2 \quad | -7$

$f(x_1) < f(x_2)$

f jest rosnąca na $\left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$, więc ma co najwyżej jedno miejsce zerowe

40)

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \qquad \binom{4}{1} = \frac{4!}{1!\cdot 3!} = 4$

$$(a+b)^4 = a^4 + \overset{=4}{\binom{4}{1}} a^3 b + \overset{=6}{\binom{4}{2}} a^2 b^2 + \underset{=4}{\binom{4}{3}} a b^3 + b^4$$

a) $f(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^4} + 4x^3 h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} =$$

$$\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{h\to 0} \left(4x^3 + 6x^2 h + 4xh^2 + h^3\right) = 4x^3$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h-1} - \frac{1}{x-1}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x-1) - (x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)\,h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overset{-1}{-\cancel{h}}}{\underbrace{(x+h-1)}_{x-1}(x-1)\cancel{h}} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

c) $f(x)=\sqrt{x}\,,\ x>0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+\cancelto{1}{h}-\cancel{x}}{\cancel{h}\cdot(\underbrace{\sqrt{x+h}}_{\sqrt{x}}+\underbrace{\sqrt{x}}_{\sqrt{x}})}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$