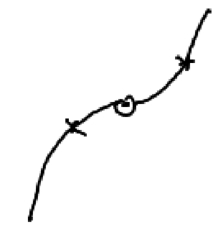
46

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{3-x^2}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$ $\qquad \left(\dfrac{g}{h}\right)'=\dfrac{g'h-gh'}{h^2}$

$$f'(x)=\frac{(x^3)'\cdot(3-x^2)-x^3(3-x^2)'}{(3-x^2)^2}=\frac{3x^2(3-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(3-x^2)^2}=$$



$$=\frac{x^2(9-3x^2+2x^2)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(3-x)(3+x)}{(3-x^2)^2}$$

| | $(-\infty,-3)$ | $-3$ | $(-3,-\sqrt{3})$ | $(-\sqrt{3},0)$ | $0$ | $(0,\sqrt{3})$ | $(\sqrt{3},3)$ | $3$ | $(3,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f$ | $\searrow$ | min lk | $\nearrow$ | $\nearrow$ | nie ma ekstr. | $\nearrow$ | $\nearrow$ | maks lk. | $\searrow$ |

na $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ $f\nearrow$

$f \searrow$ na $(-\infty,-3]$, $[3,\infty)$

$f \nearrow$ na $[-3,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$, $[3,\infty)$

57 a)

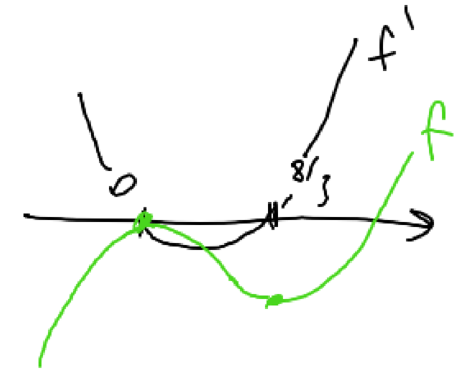
$$f(x) = x^3 - 4x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$3x^2 - 8x = x(3x - 8)$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{8}{3}$$




| | $(-\infty, 0)$ | $0$ | $(0, \frac{8}{3})$ | $\frac{8}{3}$ | $(\frac{8}{3}, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | max lok | $\searrow$ | min lok | $\nearrow$ |

c) $f(x) = \frac{2^x}{x}$ $\quad \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{(2^x)' \cdot x - 2^x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{2^x \cdot \ln 2 \cdot x - 2^x \cdot 1}{x^2} =$$

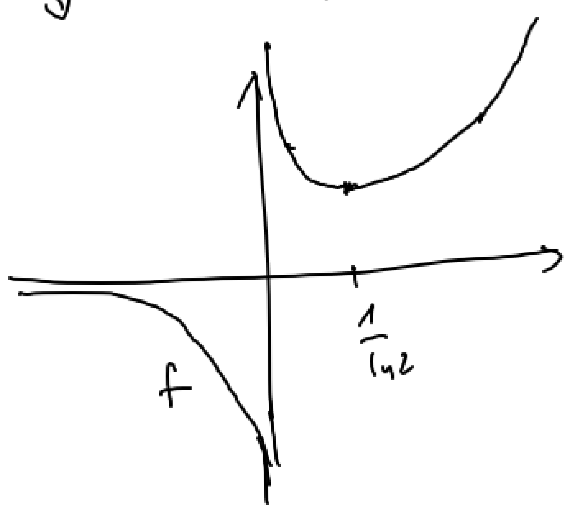
$$= \frac{2^x (x \ln 2 - 1)}{x^2}$$

$x \ln 2 - 1 = 0$

$x \ln 2 = 1$

$x = \frac{1}{\ln 2} > 0$

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \frac{1}{\ln 2})$ | $\frac{1}{\ln 2}$ | $(\frac{1}{\ln 2}, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | $\searrow$ | min. lok. | $\nearrow$ |




Fakt. $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset D_f$

Jeśli $f'(x_0) = 0$ oraz

- $f''(x_0) > 0$, to w $x_0$ $f$ ma min. lok.
- $f''(x_0) < 0$, to w $x_0$ $f$ ma max. lok.

$f(x) = x^2$

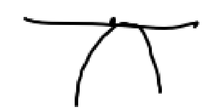
$f'(x) = 2x$

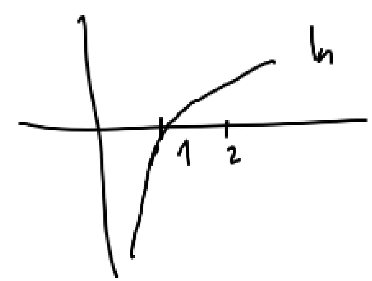
$f''(x) = 2$

$g(x) = -x^2$

$g'(x) = -2x$

$g''(x) = -2$





f)

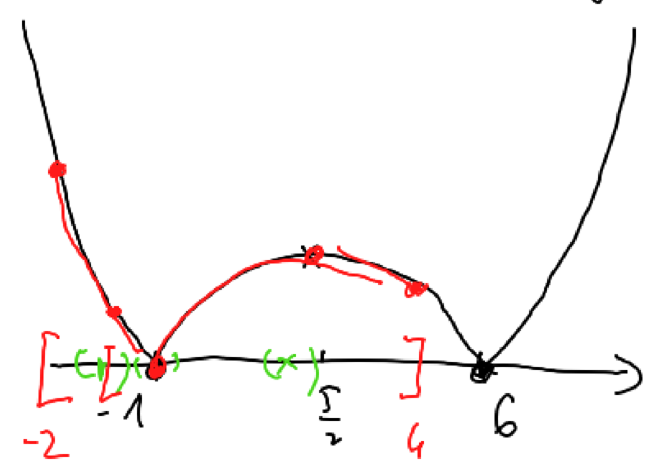
$$f(x) = |x^2 - 5x - 6| = |(x-6)(x+1)|$$

$$= \begin{cases} x^2-5x-6 & x \in (-\infty,-1) \cup (6,\infty) \\ -(x^2-5x-6) & x \in [-1,6] \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-5 & x \in (-\infty,-1) \cup (6,\infty) \\ 5-2x & x \in (-1,6) \end{cases}$$

↑ otwarty!

f jest ciągła jako złożenie f. ciągłych




f ma min. lokalne w $-1$ i $6$

maks lokalne w $5/2$

| | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,5/2)$ | $\frac{5}{2}$ | $(5/2,6)$ | $6$ | $(6,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |
| $f$ | ↘ | min lok | ↗ | maks lok | ↘ | min lok | ↗ |

f jest ciągła na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,

$f'<0$ na $(x_0-\delta, x_0)$

$f'>0$ na $(x_0, x_0+\delta)$

$\Rightarrow$ f ma min lok w $x_0$

~~Fakt~~ Uwaga. Jeśli $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to (z tw. Weierstrassa) istnieją punkty $x_0, x_1 \in [a,b]$ t. że

$$f(x_0) \le f(x) \le f(x_1) \qquad (x \in [a,b]).$$

Te punkty $x_0, x_1$ są jednymi z następujących:

- ~~a~~ a lub b
- punkty, w których $f'$ nie istnieje
- -||- $f'$ się zeruje

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x \quad [1,5]$

Szukamy punktów, w których $f$ może przyjmować wartości ekstremalne:

- $1$ : $f(1) = 2 - 15 + 36 = \boxed{23}$ ← najmniejsza
- $5$ : $f(5) = 2 \cdot 125 - 15 \cdot 25 + 36 \cdot 5 = 25(10 - 15) + 180 = -125 + 180 = \boxed{55}$ największa

* $f'(x) = 6x^2 - 15 \cdot 2x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6) = 6(x-3)(x-2)$

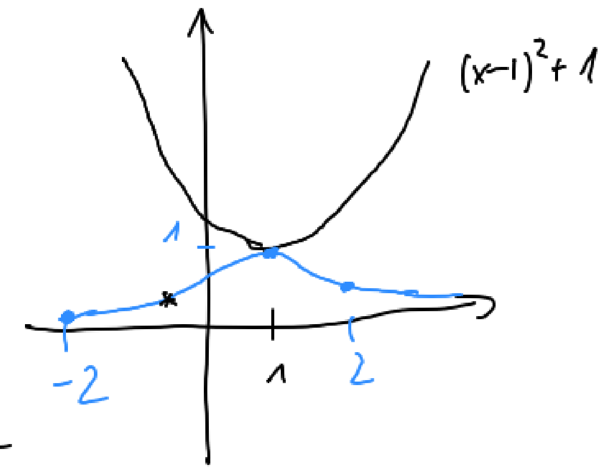
$f' = 0$ w $2, 3 \in [1,5]$

$f(2) = 2 \cdot 8 - 15 \cdot 4 + 72 = 16 + 12 = \boxed{28}$

$f(3) = 2 \cdot 27 - 15 \cdot 9 + 36 \cdot 3 = 27(2 - 5 + 4) = \boxed{27}$

b)

$$f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x-1)^2+1} \qquad [-2,2]$$




f jest ciągła na $[-2,2]$, więc wartości ekstremalne przyjmuje w jednym z nast. punktów:

- końce przedziału: $-2$: $f(-2) = \frac{1}{(-3)^2+1} = \boxed{\frac{1}{10}}$ — najmniejsza

  $2$: $f(2) = \frac{1}{1^2+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$\left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{1}{y^2}$$

- punkty ~~[illegible]~~ z $(-2,2)$, w których $f'$ nie istnieje lub się zeruje

$$f'(x) = \frac{-1}{(x^2-2x+2)^2}\cdot(x^2-2x+2)' = \frac{-1}{(x^2-2x+2)^2}\cdot(2x-2) \qquad f'(1)=0$$

$$f(1) = \frac{1}{0+1} = \boxed{1}$$ — największa

d) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$ $[-1,4]$ — ciągła

$$= \begin{cases} (x-3)^2 \cdot e^{-x}, & x \in [-1,0) \\ (x-3)^2 e^{x}, & x \in [0,4] \end{cases}$$

f jako ciągła przyjmuje wart. ekstremalne w jednym z nast. punktów:

- końce przedziału: $-1$ $f(-1) = \boxed{16 \cdot e}$
  $4$ $f(4) = \boxed{e^4}$ } większa z nich jest wart największą

- 0 – bo tam w 0 f' nie istnieje: $f(0) = \boxed{9}$

- $$f'(x) = \begin{cases} 2(x-3)e^{-x} + (x-3)^2 \cdot e^{-x}(-1) = e^{-x}(x-3)(2-(x-3)) = e^{-x}(x-3)(5-x), & x \in (-1,0) \\ 2(x-3)e^{x} + (x-3)^2 \cdot e^{x} = e^{x}(x-3)(2+x-3) = e^{x}(x-3)(x-1), & x \in (0,4) \end{cases}$$

$f(1) = \boxed{4e}$

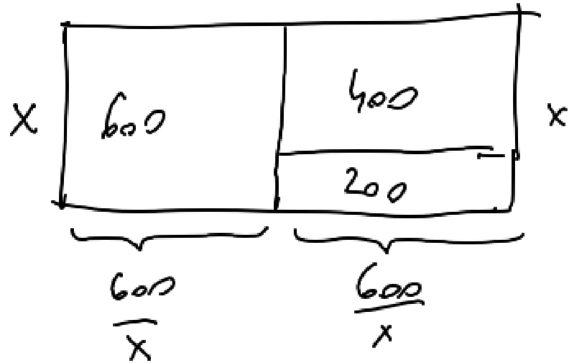
$f(3) = \boxed{0}$ — najmniejsza

$\Big\{ e^3 \gtrless 16$ ?

Odp: najmniejsza wartość → $0$

największa wartość → $\max(16e, e^4)$

49 a



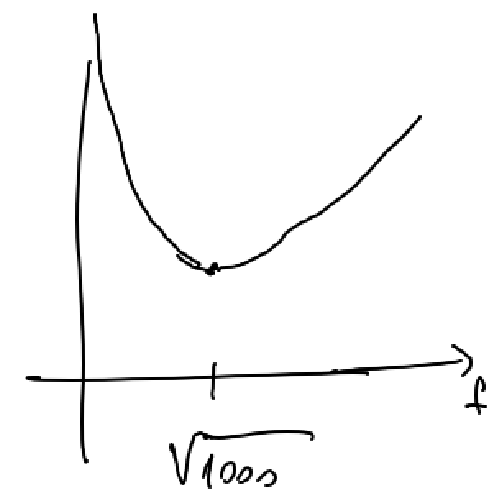

kartkówka 14 I
zadania 46, 47, 48

$(0, \infty)$

długość ogrodzenia $(x) = f(x) = \frac{1200}{x} \cdot 2 + \frac{600}{x} + 3x = \frac{3000}{x} + 3x \quad , x > 0$

$$f'(x) = \frac{-3000}{x^2} + 3 = \frac{3x^2 - 3000}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1000)}{x^2} = \frac{3(x - \sqrt{1000})(x + \sqrt{1000})}{x^2}$$

| | $(0, \sqrt{1000})$ | $\sqrt{1000}$ | $(\sqrt{1000}, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\searrow$ | min lok. | $\nearrow$ |




$\Rightarrow$ f przyjmuje wart. najmniejszą w $\sqrt{1000}$