Analiza rzeczywista i zespolona

Notatki do wykładu[1]

1 Przypomnienie

Definicja **1.** *Niech X będzie zbiorem, zaś $\mu^* : 2^X \to [0,\infty]$ funkcją spełniającą następujące warunki*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(b) $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, *jeśli* $A \subset B \subset X$,

(a) $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$, *jeśli* $A_n \subset X$.

Wówczas μ^* nazywamy miarą zewnętrzną *na X.*

Niech $\mathcal{T} = \{(a,b) : -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ oraz niech $\tau : \mathcal{T} \to [0,\infty]$ będzie dana wzorem $\tau((a,b)) = b - a$, $\tau(\emptyset) = 0$.

Definicja **2.** *Funkcję*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n) : T_n \in \mathcal{T} \text{ oraz } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\}, \qquad A \subset \mathbb{R}$$

nazywamy zewnętrzną miarą Lebesgue'a.

Poniższe dobrze znane twierdzenie będzie wnioskiem z pewnego ogólniejszego twierdzenia, które udowodnimy później.

Twierdzenie **3.** *Zewnętrzna miara Lebesgue'a jest istotnie miarą zewnętrzną.*

Definicja **4.** *Niech τ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Zbiór $A \subset X$ nazywamy* μ^*-mierzalnym, *jeśli*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \qquad \text{dla wszystkich } E \subset X.$$

Twierdzenie **5.** *(Carathéodory) Niech τ^* będzie miarą zewnętrzną na X. Wówczas rodzina $\mathcal{M}$ wszystkich zbiorów μ^*-mierzalnych jest σ-ciałem, ponadto funkcja τ^* obcięta do $\mathcal{M}$ jest miarą.*

[1] skompilował Bartłomiej Dyda

2 Twierdzenia pokryciowe

Następujący lemat przyda nam się też później, dlatego sformułujemy go w nieco większej ogólności niż teraz potrzebna.

Lemat 6 (pokryciowy Vitalego, „5B covering lemma"). *Niech $\mathcal{B}$ będzie pewną rodziną kul*[2] *w $\mathbb{R}^d$ o ograniczonych promieniach. Wówczas z rodziny $\mathcal{B}$ można wybrać przeliczalną*[3] *podrodzinę $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ kul parami rozłącznych taką, że*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B, \tag{1}$$

gdzie $5B$ jest kulą o takim samym środku co B, ale pięciokrotnie większym promieniu. Ponadto każda kula $B \in \mathcal{B}$ przecina pewną kulę $C \in \mathcal{G}$ taką, że $B \subset 5C$.

Dowód. Niech $M = \sup\{\operatorname{diam} B : B \in \mathcal{B}\}$, podzielmy rodzinę $\mathcal{B}$ na podrodziny $\mathcal{B}_n$ według wielkości kul, następująco

$$\mathcal{B}_n := \{B \in \mathcal{B} : \frac{M}{2^n} < \operatorname{diam} B \le \frac{M}{2^{n-1}}\}, \qquad n = 1, 2, \dots .$$

Oczywiście $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$.

Niech $\mathcal{G}_1$ będzie *maksymalnym* (w sensie relacji inkluzji) podzbiorem rodziny $\mathcal{B}_1$, którego elementy są parami rozłączne. Powiedzmy, że $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_{j-1}$ zostały już zdefiniowane. Rodzinę kul $\mathcal{G}_j$ chcemy wybrać tak, aby jej elementy były rozłączne z już wybranymi kulami. Bierzemy więc za $\mathcal{G}_j$ *maksymalny* (w sensie relacji inkluzji) podzbiór

$$\{B \in \mathcal{B}_j : B \cap B' = \emptyset \text{ dla wszystkich } B' \in \bigcup_{i=1}^{j-1} \mathcal{G}_i\},$$

który składa się z parami rozłącznych kul.

Kładziemy $\mathcal{G} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{G}_j$. Oczywiście kule w tej rodzinie są parami rozłączne.

Niech $B \in \mathcal{B}_j$. Z maksymalności $\mathcal{G}_j$ wynika, że kula B przecina pewną kulę $C \in \bigcup_{i=1}^{j} \mathcal{G}_i$. Wówczas

$$\operatorname{diam} B \le \frac{M}{2^{j-1}} = 2 \cdot \frac{M}{2^j} < 2 \operatorname{diam} C.$$

Stąd wynika, że $B \subset 5C$, w konsekwencji zachodzi również (1). □

Uwaga 7. *Wyjaśnijmy dokładniej istnienie maksymalnych rodzin z powyższego dowodu, na przykładzie rodziny $\mathcal{G}_1$. Rozważamy następujący zbiór*[4]

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_1 : \textit{elementy } \mathcal{R} \textit{ są parami rozłączne}\}.$$

Zbiór $\mathbb{F}$, jak każdy podzbiór zbioru potęgowego, jest częściowo uporządkowany przez relację inkluzji. Zatem z twierdzenia Hausdorffa o maksymalnym łańcuchu, istnieje łańcuch[5] *$\mathbb{L} \subset \mathbb{F}$, który jest maksymalny w sensie inkluzji.*

[2] W tym lemacie jest obojętne, czy kule te są otwarte czy domknięte.

[3] Przeliczalna oznacza, że jest równoliczna z pewnym *podzbiorem* zbioru $\mathbb{N}$.

[4] Ten zbiór $\mathbb{F}$ jest podzbiorem $2^{\mathcal{B}_1}$, czyli jest zbiorem rodzin kul, co sprawia, że dość trudno się o nim wysławiać. Dla ułatwienia używamy różnego kroju liter: B_1, B_2 oznaczają kule, litery pisane $\mathcal{R}$, $\mathcal{B}_1$ – rodziny kul, litery pogrubione $\mathbb{F}$, $\mathbb{L}$ – zbiory rodzin kul.

[5] $\mathbb{L}$ *jest łańcuchem* oznacza, że dla każdych $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{L}$ zachodzi $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ lub $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$.

Niech $\mathcal{G}_1 := \bigcup_{\mathcal{A}\in\mathbb{L}} \mathcal{A}$. Twierdzimy, że $\mathcal{G}_1 \in \mathbb{F}$. Istotnie, jeśli $B_1, B_2 \in \mathcal{G}_1$, to z określenia $\mathcal{G}_1$ istnieją $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathbb{L}$ takie, że $B_j \in \mathcal{A}_j$ $(j = 1, 2)$. Ponieważ $\mathbb{L}$ jest łańcuchem, to $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ lub na odwrót, powiedzmy, że $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. W takiej sytuacji $B_1, B_2 \in \mathcal{A}_2$, a ponieważ $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{L} \subset \mathbb{F}$, więc kule B_1 i B_2 są rozłączne.

Dalej, twierdzimy, że rodzina $\mathcal{G}_1$ jest maksymalnym (w sensie inkluzji) podzbiorem $\mathbb{F}$. Istotnie, gdyby istniała rodzina $\mathcal{H} \in \mathbb{F}$ taka, że $\mathcal{H} \supset \mathcal{G}_1$ oraz $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}_1$, to $\mathbb{L} \cup \{\mathcal{H}\}$ byłby łańcuchem istotnie większym od $\mathbb{L}$, co daje sprzeczność z maksymalnością $\mathbb{L}$.

Definicja **8.** *Niech $J = \{[a, b] : -\infty < a < b < \infty\}$ będzie rodziną wszystkich niezdegenerowanych odcinków domkniętych. Niech $E \subset \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{V} \subset J$. Jeśli dla każdych $x \in E$ oraz $\varepsilon > 0$ istnieje $V \in \mathcal{V}$ takie, że $x \in V$ oraz $\lambda(V) < \varepsilon$, to $\mathcal{V}$ nazywamy* pokryciem Vitalego *zbioru E.*

Twierdzenie **9** (pokryciowe Vitalego)**.** *Niech $\mathcal{V}$ będzie pokryciem Vitalego zbioru $E \subset \mathbb{R}$. Wówczas istnieje przeliczalna rodzina zbiorów $\{V_n\} \subset \mathcal{V}$ parami rozłącznych taka, że*

$$\lambda(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n) = 0.^{6}$$

Dowód. Ponieważ podrodzina $\{I \in \mathcal{V} : \lambda(I) \leq 1\}$ jest również pokryciem Vitalego E, więc bez utraty ogólności można założyć, że $\lambda(I) \leq 1$ dla $I \in \mathcal{V}$.

Na mocy lematu 6 możemy wybrać podrodzinę $\mathcal{G} \subset \mathcal{V}$ odcinków parami rozłącznych taką, że

$$\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B,$$

oraz że każdy odcinek $V \in \mathcal{V}$ jest zawarty w $5B$ dla pewnego odcinka $B \in \mathcal{G}$ o niepustym przekroju z V. Ustalmy $r > 0$. Niech $Z = E \cap (-r, r) \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B$. Z dowolności r wystarczy pokazać, że $\lambda^*(Z) = 0$.

Niech $\{C_n\}$ będzie rodziną tych odcinków z $\mathcal{G}$, które mają niepusty przekrój z $(-r, r)$ (rodzina ta jest przeliczalna, może być skończona lub nie). Zatem

$$Z = E \cap (-r, r) \setminus \bigcup_n C_n.$$

Ustalmy $z \in Z$. Dla każdego N zachodzi $z \notin \bigcup_{n\leq N} C_n =: K$. Ponieważ K jest domknięty, więc $\operatorname{dist}(z, K) > 0$; z własności pokrycia Vitalego istnieje więc odcinek $I \in \mathcal{V}$ taki, że $z \in I \subset (-r, r)$ oraz $I \cap K = \emptyset$. Z własności rodziny $\mathcal{G}$, odcinek I przecina pewien odcinek C_i taki, że $I \subset 5C_i$. Ponieważ $I \cap K = \emptyset$, więc musi być $i > N$. Zatem $z \in 5C_i$ dla pewnego $i > N$, a w konsekwencji

$$Z \subset \bigcup_{n>N} 5C_n.$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$\lambda^*(Z) \leq 5 \sum_{n>N} \lambda(C_n). \tag{2}$$

Z drugiej strony, zbiory C_n są parami rozłączne oraz są zawarte w $[-r-1, r+1]$, a więc $\sum_{n>N} \lambda(C_n) \leq \lambda([-r-1, r+1]) < \infty$. Stąd i z (2) otrzymujemy, że $\lambda^*(Z) = 0$. $\square$ — 7 X 2021

[6] Nie zakładamy mierzalności zbioru E, mimo to tutaj możemy napisać miarę λ zamiast miary zewnętrznej λ^*, ponieważ zbiory λ^*-zerowe są mierzalne.

3 Różniczkowanie funkcji monotonicznych

Naszym celem będzie udowodnienie, że każda funkcja monotoniczna (na odcinku) ma pochodną prawie wszędzie.

Definicja **10.** *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie odcinkiem. Liczbę $\alpha \in [-\infty, \infty]$ nazywamy* liczbą pochodną *(ang.* derived number*) funkcji $f : I \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in I$, jeśli istnieje ciąg $h_k \to 0$, $h_k \neq 0$ taki, że*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \alpha.$$

Jakąkolwiek taką liczbę będziemy oznaczać przez $Df(x_0)$ (mimo że na ogół nie jest ona wyznaczona jednoznacznie).

Przykład **11.** *Funkcja $f(x) = |x|$ określona dla $x \in [-1, 1]$ ma w punkcie 0 dwie liczby pochodne: -1 oraz 1.*

Lemat **12.** *Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie odcinkiem, niech $f : I \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in I$. Wówczas istnieje liczba pochodna f w x_0. W punkcie x_0 jest dokładnie jedna liczba pochodna $Df(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w punkcie x_0 pochodną*[7]*. W takiej sytuacji $f'(x_0) = Df(x_0)$. Jeśli f jest rosnąca, to każda jej liczba pochodna jest nieujemna.*

Dowód. Na ćwiczeniach. □

Lemat **13.** *Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ściśle rosnąca i niech $E \subset [a, b]$. Jeśli w każdym punkcie $x \in E$ istnieje liczba pochodna $Df(x) < p$, to $\lambda^*(f(E)) \leq p\lambda^*(E)$.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $G \supset E$ będzie zbiorem otwartym takim, że $\lambda(G) < \lambda^*(E) + \varepsilon$. Dla $x_0 \in E$ istnieje ciąg $(h_k) \to 0$, $h_k \neq 0$ taki, że dla każdego n oraz każdego odcinka[8] $[x_0, x_0 + h_n] \subset G$ zachodzi

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} < p. \tag{3}$$

Oznaczmy

$$I_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n], \quad J_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0 + h_n)], \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ponieważ f jest ściśle rosnąca, więc

$$f(I_n(x_0)) \subset J_n(x_0) \tag{4}$$

i $J_n(x_0)$ jest niezdegenerowanym odcinkiem domkniętym. Z nierówności (3) oraz z równości

$$\lambda(I_n(x_0)) = |h_n|, \quad \lambda(J_n(x_0)) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|$$

wynika, że

$$\lambda(J_n(x_0)) < p\lambda(I_n(x_0)).$$

[7] Nie wykluczamy tu sytuacji $f'(x_0) = \pm\infty$.

[8] Tutaj dla wygody oznaczamy przez $[x_0, x_0 + h_n]$ odcinek o końcach x_0 i $x_0 + h_n$ (nawet jeśli $h_n < 0$). Podobnie przez $[f(x_0), f(x_0 + h_n)]$ oznaczamy odcinek o końcach $f(x_0)$ i $f(x_0 + h_n)$.

Ponieważ $h_n \to 0$, więc $\lambda(I_n(x_0)) \to 0$, czyli również $\lambda(J_n(x_0)) \to 0$. Wobec tego rodzina odcinków

$$\mathcal{V} = \{J_n(x_0) : x_0 \in E,\, n \in \mathbb{N}\}$$

jest pokryciem Vitalego zbioru $f(E)$. Z twierdzenia 9 (Vitalego) wynika, że istnieje przeliczalna rodzina $\{J_{n_i}(x_i)\}$ $(i \in \mathbb{N})$ zbiorów parami rozłącznych, taka że

$$\lambda\left(f(E) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} J_{n_i}(x_i)\right) = 0.$$

Stąd

$$\lambda^*(f(E)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_{n_i}(x_i)) \leq p \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)).$$

Ponieważ $J_{n_i}(x_i)$ są parami rozłaczne, więc z inkluzji (4) wynika, że zbiory $f(I_{n_i}(x_i))$ też są parami rozłączne. Stąd odcinki $(I_{n_i}(x_i))$ również są parami rozłączne. Otrzymujemy więc

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda\left(I_{n_i}(x_i)\right) = \lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_{n_i}(x_i)) \leq \lambda(G) < \lambda^*(E) + \varepsilon.$$

Stąd i z poprzedniej nierówności

$$\lambda^*(f(E)) < p(\lambda^*(E) + \varepsilon),$$

skąd z dowolności wyboru ε wynika teza. □

Lemat **14.** *Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ściśle rosnąca i niech $E \subset [a, b]$. Jeśli w każdym punkcie $x \in E$ istnieje liczba pochodna $Df(x) > q \geq 0$, to $\lambda^*(f(E)) \geq q\lambda^*(E)$.*

Dowód. Na ćwiczeniach. □

Twierdzenie **15.** *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie rosnąca. Wówczas f ma skończoną pochodną prawie wszędzie.*

Dowód. Rozważając $f(x) + x$ w miejsce f możemy założyć, że f jest ściśle rosnąca. Niech

$$E_\infty = \{x \in [a, b] : \text{istnieje nieskończona liczba pochodna } f \text{ w punkcie } x\}.$$

Ponieważ $f(E_\infty) \subset [f(a), f(b)]$, więc na mocy lematu 14

$$q\lambda^*(E_\infty) \leq \lambda^*(f(E_\infty)) \leq f(b) - f(a) < \infty$$

dla dowolnych $q \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\lambda^*(E_\infty) = 0. \tag{5}$$

Teraz niech $0 \leq p < q < \infty$ oraz

$$E_{pq} = \{x \in [a, b] : \text{istnieją liczby pochodne } D_1 f(x) \text{ oraz } D_2 f(x) \text{ takie, że } D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x)\}.$$

Z lematów 13 oraz 14 wnioskujemy, że

$$q\lambda^*(E_{pq}) \leq \lambda^*(f(E_{pq})) \leq p\lambda^*(E_{pq}).$$

Ponieważ $p < q$, więc z powyższych nierówności wynika, że

$$\lambda^*(E_{pq}) = 0. \tag{6}$$

Jeśli f nie jest różniczkowalna w punkcie x, to ma w tym punkcie nieskończoną liczbę pochodną lub ma liczby pochodne $D_1 f(x) < D_2 f(x)$. W tym drugim przypadku istnieją liczby $p, q \in \mathbb{Q}$ takie, że

$$D_1 f(x) < p < q < D_2 f(x),$$

czyli $x \in E_{pq}$. Wobec tego

$$N := \{x : f \text{ nie jest różniczowalna w } x\} \subset E_\infty \cup \bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}} E_{pq}.$$

Na mocy (5) i (6), $\lambda(N) = 0$. $\square$

TWIERDZENIE **16.** *Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie rosnąca. Wówczas f' jest mierzalna oraz*

$$\int_a^b f' d\lambda \le f(b) - f(a). \tag{7}$$

Dowód. Rozszerzmy funkcję f do odcinka $[a, b + 1]$ kładąc $f(x) = f(b)$ dla $b < x \le b + 1$. Niech

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Wówczas f_n zbiegają do f' w każdym punkcie, w którym f' istnieje. Stąd f' jest mierzalna[9] oraz $f_n \to f'$ p.w. na $[a, b]$. Z lematu Fatou

$$\begin{aligned}\int_a^b f' d\lambda &\le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n d\lambda \le \sup_n \int_a^b f_n d\lambda \\ &\le \sup_n \left\{ n \int_a^b \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right) dx \right\}.\end{aligned}$$

Z niezmienniczości miary Lebesgue'a na przesunięcia,

$$\int_a^b f(x + \frac{1}{n})\, dx = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\, dx, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zatem

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right) dx &= \left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} - \int_a^{a+\frac{1}{n}} \right) f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{n} f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\, dx \\ &\le \frac{1}{n}(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

Wobec tego

$$\int_a^b f' d\lambda \le \sup_n \left\{ n \int_a^b \left(f(x + \frac{1}{n}) - f(x) \right) dx \right\} \le f(b) - f(a). \qquad \square$$

[9] W zasadzie f' jest określona tylko na podzbiorze $[a, b] \setminus N \subset [a, b]$ takim, że $\lambda(N) = 0$. Możemy ją jednak jakkolwiek dookreślić na zbiorze N miary zero nie psując własności $f_n \to f'$ p.w. Tak dookreślona f' jest więc mierzalna i właściwie ją mamy dalej na myśli pisząc f'.

Uwaga **17.** *We wzorze (7) może zachodzić nierówność ostra: np. funkcja $f(x) = \mathbf{1}_{[1,2]}(x)$ dla $x \in [0,2]$ jest rosnąca i spełnia $f' = 0$ na zbiorze $[0,2] \setminus \{1\}$, a więc lewa strona (7) jest równa zero, a prawa jeden. Co zaskakujące, nierówność w (7) może być ostra nawet dla funkcji ciągłych, standardowym przykładem jest funkcja Cantora (rozważana dokładniej na ćwiczeniach).*

4 Funkcja maksymalna Hardy'ego–Littlewooda

W tej części odejdziemy na chwilę od głównego wątku, w szczególności będziemy teraz rozważali funkcje określone na $\mathbb{R}^d$.

Mówimy, że $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, jeśli dla dowolnej kuli $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^d$ zachodzi $f|_B \in L^1(B)$ ($f|_B$ jest obcięciem funkcji f do kuli B).

Definicja **18.** *Niech $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Funkcję*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

nazywamy funkcją maksymalną Hardy'ego–Littlewooda *funkcji f.*

— 14 X 2021

Operator M nie jest liniowy, ale jest *podaddytywny*, tzn. $M(f+g) \leq Mf + Mg$, ponadto $M(af) = |a|Mf$.

Twierdzenie **19** (Hardy–Littlewood)**.** *(a) Operator M jest* słabego typu *$(1,1)$, to znaczy, istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnej funkcji $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ i dowolnego $t > 0$ zachodzi*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > t\}) \leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(b) Dla $1 < p \leq \infty$ operator M jest ograniczony na *$L^p(\mathbb{R}^d)$, to znaczy, istnieje stała $C < \infty$ taka, że dla dowolnej funkcji $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ zachodzi*

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Z części (b) powyższego twierdzenia nie będziemy korzystać, a więc nie będziemy jej też dowodzić.

Dowód. Niech $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ oraz $t > 0$, oznaczmy

$$E_t = \{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > t\}.$$

Dla $x \in E_t$ istnieje $r_x > 0$ takie, że

$$\frac{1}{\lambda(B(x,r_x))} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\, dy > t,$$

czyli

$$\lambda(B(x,r_x)) < t^{-1} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\, dy.$$

Stąd i z tego, że $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ wynika, że $\sup_{x \in E_t} r_x < \infty$. Możemy więc do rodziny kul $\{B(x,r_x) : x \in E_t\}$ zastosować lemat 6, otrzymamy ciąg kul $B(x_i, r_{x_i})$ parami rozłącznych i takich, że

$$E_t \subset \bigcup_{x \in E_t} B(x,r_x) \subset \bigcup_i B(x_i, 5r_{x_i}).$$

Z tej inkluzji wynika, że

$$\begin{aligned}\lambda(E_t) &\leq \lambda(\bigcup_i B(x_i, 5r_{x_i})) = 5^d \sum_i \lambda(B(x_i, r_{x_i})) \\ &\leq 5^d \sum_i t^{-1} \int_{B(x_i, r_{x_i})} |f(y)|\, dy \leq \frac{5^d}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

zatem udowodniliśmy część (a) ze stałą $C = 5^d$. □

5 Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu

Zaczniemy od następującego lematu.

Lemat **20.** *Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ oraz*

$$f_r(x) = \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy, \tag{8}$$

to $f_r \to f$ w normie $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Dowód. Zachodzi

$$\begin{aligned}\|f_r - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f_r(x) - f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x))\, dy\Big|\, dx \\ &\leq \frac{1}{\lambda(B(0,r))} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda(B(0,r))} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B(0,r)} |f(x+y) - f(x)|\, dy\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda(B(0,r))} \int_{B(0,r)} \int_{\mathbb{R}^d} |(\tau_{-y} f - f)(x)|\, dx\, dy \\ &= \frac{1}{\lambda(B(0,r))} \int_{B(0,r)} \|\tau_{-y} f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\, dy.\end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$. Z zadania z ćwiczeń wiemy, że $\|\tau_{-y} f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$, zatem istnieje $r_0 > 0$ takie, że dla $y \in B(0, r_0)$ zachodzi $\|\tau_{-y} f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$. Wówczas dla $r \leq r_0$

$$\frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(0,r)} \|\tau_{-y} f - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\, dy \leq \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(0,r)} \varepsilon\, dy = \varepsilon,$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie **21** (Lebesgue'a o różniczkowaniu)**.** *Jeśli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, to*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x) \tag{9}$$

dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$.

Dowód. Określmy f_r jak we wzorze (8). Z poprzedniego lematu wynika, że istnieje ciąg $r_n \to 0$ taki, że $f_{r_n} \to f$ prawie wszędzie. Wystarczy więc pokazać, że granica po lewej stronie w (9) istnieje dla prawie wszystkich x.

Rozważmy dowolne $R > 0$, niech $\tilde{f} = f \cdot \mathbf{1}_{B(0,R+1)} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Obie strony (9) są takie same dla f oraz $\tilde{f}$, jeśli $x \in B(0, R)$. Wobec tego bez utraty ogólności możemy założyć, że $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Dla funkcji $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ niech g_r będzie określone analogicznie jak we wzorze (8); oznaczmy

$$\Omega g(x) = |\limsup_{r\to 0} g_r(x) - \liminf_{r\to 0} g_r(x)|.$$

Jeśli $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, to z nierówności

$$|g_r(x) - g(x)| \leq \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)|\, dy$$

oraz z jednostajnej ciągłości funkcji g wynika, że $g_r \to g$ jednostajnie na $\mathbb{R}^d$. Wobec tego zachodzi wówczas $\Omega g(x) = 0$ dla każdego x.

Ustalmy dowolny $\varepsilon > 0$. Jeśli $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, to z części (a) twierdzenia 19 wynika, że

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : 2Mg(x) > \varepsilon\}) \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Ale

$$\Omega g(x) \leq 2Mg(x),$$

więc

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : \Omega g(x) > \varepsilon\}) \leq \lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : 2Mg(x) > \varepsilon\}) \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (10)$$

Ponieważ $C_c(\mathbb{R}^d)$ jest gęste w $L^1(\mathbb{R}^d)$, więc funkcję $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ możemy zapisać w postaci $f = h + g$, gdzie $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$, zaś $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ spełnia $\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon^2$, jak chcemy. Ponieważ

$$\Omega f \leq \Omega g + \Omega h = \Omega g,$$

więc z nierówności (10) oraz określenia funkcji g wynika, że

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : \Omega f(x) > \varepsilon\}) \leq \frac{2C}{\varepsilon} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq 2C\varepsilon.$$

Przechodząc z ε do zera widzimy[10], że

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : \Omega f(x) > 0\}) = 0.$$

To oznacza, że $\Omega f = 0$ prawie wszędzie, czyli dla prawie wszystkich x zachodzi równość $\limsup_{r\to 0} f_r(x) = \liminf_{r\to 0} f_r(x)$, a więc granica $\lim_{r\to 0} f_r(x)$ (dla tych x) istnieje. □

Jeśli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, to funkcja

$$\tilde{f}(x) := \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy \quad (11)$$

jest dobrze określona dla *wszystkich* $x \in \mathbb{R}^d$. Ponadto na mocy twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu, funkcja $\tilde{f}$ jest pewnym reprezentantem $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$[11]. — 21 X 2021

[10] Jednym ze sposobów na uzasadnienie tego przejścia jest skorzystanie z *ciągłości miary w górę*: jeśli $E_n \subset E_{n+1}$, to $\lim_n \lambda(E_n) = \lambda(\bigcup_n E_n)$.

[11] Przypomnijmy, że jeśli funkcje $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ są *reprezentantami* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, to $f_1 = f_2$ p.w.

Definicja 22. *Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^d$ jest* punktem Lebesgue'a *funkcji $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, jeśli*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - \tilde{f}(x)|\, dy = 0,$$

gdzie $\tilde{f}(x)$ jest dane wzorem (11)[12]*. Zbiór wszystkich punktów Lebesgue'a funkcji f nazywamy* zbiorem Lebesgue'a *funkcji f.*

Twierdzenie 23. *Jeśli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, to zbiór Lebesgue'a funkcji f jest miary pełnej, tzn. jego dopełnienie jest zbiorem miary zero.*

Dowód. Dla $c \in \mathbb{Q}$ niech

$$E_c = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - c|\, dy \neq |\tilde{f}(x) - c| \right\}.$$

Z twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu zastosowanego do funkcji $|f - c|$ wynika[13] że $\lambda(E_c) = 0$. Niech $E = \bigcup_{c\in\mathbb{Q}}$, również $\lambda(E) = 0$.

Połóżmy $N = \{x \in \mathbb{R}^d : |\tilde{f}(x)| = \infty\}$, ponieważ $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ oraz $f = \tilde{f}$ p.w., więc $\lambda(N) = 0$.

Niech $x \in \mathbb{R}^d \setminus (E \cup N)$, pokażemy, że x jest punktem Lebesgue'a f. Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$. Znajdujemy $c \in \mathbb{Q}$ takie, że $|\tilde{f}(x) - c| < \varepsilon/2$. Wówczas

$$\begin{aligned} &\limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - \tilde{f}(x)|\, dy \\ &\qquad \le \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - c|\, dy + \varepsilon/2 \\ &\qquad = |\tilde{f}(x) - c| + \varepsilon/2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

powyższa równość wynika z tego, że $x \notin E_c$. Z dowolności ε wynika, że x istotnie jest punktem Lebesgue'a funkcji f. □

Definicja 24. *Mówimy, że rodzina $\mathcal{F}$ mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}^d$ jest* regularna *w punkcie $x \in \mathbb{R}^d$, jeśli*

(a) zbiory w rodzinie $\mathcal{F}$ są ograniczone i mają dodatnią miarę;

(b) istnieje ciąg zbiorów $\{S_i\} \subset \mathcal{F}$ taki, że $\lambda(S_i) \to 0$, gdy $i \to \infty$;

(c) istnieje stała $C > 0$ taka, że dla dowolnego zbioru $S \in \mathcal{F}$ zachodzi

$$\lambda(S) \ge C\lambda(B(x,r)), \tag{12}$$

gdzie $r > 0$ jest najmniejszym promieniem, dla którego $S \subset \overline{B(x,r)}$.

Twierdzenie 25. *Jeśli $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, x jest punktem Lebesgue'a funkcji f oraz rodzina $\mathcal{F}$ jest regularna w punkcie x, to*

$$\lim_{S\in\mathcal{F},\, \lambda(S)\to 0} \frac{1}{\lambda(S)} \int_S f(y)\, dy = \tilde{f}(x). \tag{13}$$

[12]Dla $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ można by zastąpić $\tilde{f}(x)$ po prostu przez $f(x)$. Formalnie taka definicja nie byłaby poprawna dla $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, ponieważ zbiory Lebesgue'a dla różnych reprezentantów byłyby różne, dlatego używamy w definicji konkretnego reprezentanta $\tilde{f}$.

[13]Po zastosowaniu tego twierdzenia otrzymamy $\tilde{g}(x)$, gdzie $g(x) = |f(x) - c|$, nie zaś $|\tilde{f}(x) - c|$, jednak nie ma to znaczenia, ponieważ $\tilde{g}(x) = |\tilde{f}(x) - c|$ prawie wszędzie.

Dowód. Niech $S \in \mathcal{F}$ oraz niech $\overline{B(x,r)}$ będzie najmniejszą kulą zawierającą zbiór S. Zauważmy, że jeśli $\lambda(S) \to 0$, to $r \to 0$ na mocy (12). Wobec tego

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda(S)}\int_S f(y)\,dy - \tilde{f}(x)\right| &\leq \frac{1}{\lambda(S)}\int_S |f(y)-\tilde{f}(x)|\,dy \\ &\leq \frac{1}{C\lambda(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)-\tilde{f}(x)|\,dy \to 0,\end{aligned}$$

gdy $r \to 0$. □

Wniosek **26.** *Jeśli $f \in L^1[a,b]$, to funkcja F określona dla $x \in [a,b]$ wzorem*

$$F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

ma pochodną w każdym punkcie $x \in (a,b)$ będącym punktem Lebesgue'a funkcji f, ponadto dla takich punktów x zachodzi $F'(x) = f(x)$.

W szczególności F' istnieje p.w. na $[a,b]$ oraz $F' = f$ p.w. na $[a,b]$.

Dowód. Niech $x \in (a,b)$ będzie punktem Lebesgue'a funkcji f i niech

$$\mathcal{F} = \{[x, x+h] : h > 0 \text{ oraz } [x,x+h] \subset [a,b]\}.$$

Wówczas rodzina $\mathcal{F}$ jest regularna w punkcie x, więc z twierdzenia 25

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\lambda([x,x+h])}\int_{[x,x+h]} f(y)\,dy = \tilde{f}(x).$$

Ale

$$\frac{1}{\lambda([x,x+h])}\int_{[x,x+h]} f(y)\,dy = \frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

wnioskujemy więc, że pochodna prawostronna $F'_+(x)$ istnieje i równa się $\tilde{f}(x)$. Dalej, rodzina

$$\mathcal{G} = \{[x+h, x] : h < 0 \text{ oraz } [x+h,x] \subset [a,b]\}.$$

jest regularna w punkcie x, oraz

$$\frac{1}{\lambda([x+h,x])}\int_{[x+h,x]} f(y)\,dy = \frac{F(x)-F(x+h)}{|h|} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}.$$

Stosując znowu twierdzenie 25 wnioskujemy, że pochodna lewostronna $F'_-(x)$ istnieje i równa się $\tilde{f}(x)$. □

6 Funkcje o wahaniu ograniczonym

Definicja **27.** *Dla funkcji $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ oznaczamy przez $V(f;a,\cdot)$ jej* funkcję wahania całkowitego*, określoną wzorem*

$$V(f;a,z) := \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)-f(x_{k-1})| : n \in \mathbb{N},\ a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = z\right\},$$

dla $z \in [a,b]$. Jeśli $V(f;a,b) < \infty$, to mówimy, że funkcja f ma wahanie ograniczone *i piszemy $f \in \mathrm{BV}[a,b]$.*

Twierdzenie **28.** *Niech* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *ma wahanie ograniczone. Wówczas funkcja* f *jest różnicą dwóch funkcji rosnących oraz ma skończoną pochodną prawie wszędzie na* $[a,b]$*. Ponadto* $f' \in L^1[a,b]$*.*

Dowód. Pierwsza część zostanie udowodniona na ćwiczeniach. Druga część wynika z pierwszej i z twierdzenia 15. Trzecia część (a w szczególności mierzalność f') wynika z kolei z twierdzenia 16. □

Uwaga **29.** *Jeśli* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *ma wahanie ograniczone, to* $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$ *jest kombinacją liniową czterech funkcji rosnących, a więc również* f' *istnieje p.w. oraz* $f' \in L^1[a,b]$*.*

Funkcje o ograniczonym wahaniu mają pochodną całkowalną, jednak na ogół nie zachodzi dla nich wzór

$$\int_a^b f'\, d\lambda = f(b) - f(a) \tag{14}$$

— istotnie, jak widzieliśmy w uwadze 17 równość taka nie zachodzi nawet dla funkcji rosnących. Naszym kolejnym celem będzie znalezienie klasy funkcji, dla których wzór (14) *zachodzi.* — 28 X 2021

7 Funkcje absolutnie ciągłe

Definicja **30.** *Mówimy, że funkcja* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *jest* absolutnie ciągła *(piszemy* $f \in AC[a,b]$*), jeśli dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje* $\delta > 0$ *taka, że dla dowolnych przedziałów parami rozłącznych* $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_N, \beta_N) \subset [a,b]$ *zachodzi implikacja*

$$\sum_{k=1}^{N} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^{N} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

Twierdzenie **31.** *Zachodzi inkluzja* $AC[a,b] \subset BV[a,b]$*.*

Dowód. Na ćwiczeniach. □

Wniosek **32.** *Funkcje absolutnie ciągłe mają pochodną prawie wszędzie, pochodna ta jest bezwzględnie całkowalna.* □

Lemat **33.** *Jeśli* $f \in AC[a,b]$ *oraz* $f' = 0$ *p.w. na* $[a,b]$*, to* f *jest stała.*

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech $E = \{x \in [a,b] : f'(x) = 0\}$. Dla każdego $x \in E$ oraz $\delta > 0$ niech $I_{x,\delta} \subset [a,b]$ będzie odcinkiem domkniętym długości $< \delta$ zawierającym punkt x i takim, że $|f(x) - f(y)| \le \varepsilon |x - y|$ dla $y \in I_{x,\delta}$; taki odcinek istnieje, bo $f'(x) = 0$. Rodzina odcinków $\{I_{x,\delta}\}$ jest pokryciem Vitalego zbioru E, więc można wybrać podrodzinę przeliczalną $\{I_{x_n,\delta_n}\}$ złożoną z parami rozłącznych odcinków i taką, że

$$\lambda(E \setminus \bigcup_n I_{x_n,\delta_n}) = 0.$$

Z własności N Łuzina funkcji f (udowodnionej na ćwiczeniach) wynika, że

$$\lambda(f(E \setminus \bigcup_n I_{x_n,\delta_n})) = 0, \qquad \lambda(f([a,b] \setminus E)) = 0.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\lambda(f([a,b])) &\le \lambda(f([a,b]\setminus E)) + \lambda(f(E\setminus \bigcup_n I_{x_n,\delta_n})) + \lambda(f(\bigcup_n I_{x_n,\delta_n}))\\ &\le 0 + 0 + \sum_n \lambda(f(I_{x_n,\delta_n})).\end{aligned}$$

Jeśli $y \in I_{x_n,\delta_n}$, to

$$|f(y) - f(x_n)| \le \varepsilon |x_n - y| \le \varepsilon \lambda(I_{x_n,\delta_n}),$$

skąd $f(I_{x_n,\delta_n}) \subset \overline{B(f(x_n), \varepsilon\lambda(I_{x_n,\delta_n}))}$, a w konsekwencji

$$\lambda(f(I_{x_n,\delta_n})) \le 2\varepsilon\lambda(I_{x_n,\delta_n}).$$

Zatem

$$\lambda(f([a,b])) \le \sum_n 2\varepsilon\lambda(I_{x_n,\delta_n}) \le 2\varepsilon(b-a).$$

Z dowolności ε wynika, że $\lambda(f([a,b])) = 0$. Ponieważ f jest ciągła, więc obraz $f([a,b])$ jest odcinkiem domkniętym – ale obraz ten ma miarę zero, więc musi to być odcinek zdegenerowany do punktu. To oznacza, że f jest stała. □

Uwaga **34.** *W powyższym lemacie zamiast zakładać, że $f \in AC[a,b]$, wystarczy założyć, że f jest ciągła i ma własność N Łuzina. Istotnie, w dowodzie korzystaliśmy tylko z tych dwóch własności.*

Twierdzenie **35.** *Jeśli $f \in L^1[a,b]$, to funkcja*

$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$$

jest absolutnie ciągła na $[a,b]$.

Dowód. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Ponieważ $f \in L^1[a,b]$, więc

$$\lim_{N\to\infty} \int_a^b |f(x)|\mathbf{1}_{\{|f|>N\}}(x)\,dx = 0.$$

Istnieje więc N na tyle duże, aby

$$\int_a^b |f(x)|\mathbf{1}_{\{|f|>N\}}(x)\,dx < \varepsilon/2.$$

Oznaczmy $A = \{x : |f(x)| > N\}$ i połóżmy $\delta = \varepsilon/(2N)$. Niech $(\alpha_1,\beta_1), \ldots, (\alpha_n,\beta_n) \subset [a,b]$ będą dowolnymi przedziałami parami rozłącznymi takimi, że $\sum_{k=1}^n (\beta_k - \alpha_k) < \delta$; oznaczmy $F = \bigcup_{k=1}^n [\alpha_k, \beta_k]$. Wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| &= \sum_{k=1}^n \left|\int_{\alpha_k}^{\beta_k} f(y)\,dy\right| \le \int_F |f(y)|\,dy\\ &= \int_{F\setminus A} |f(y)|\,dy + \int_{F\cap A} |f(y)|\,dy\\ &\le N\lambda(F\setminus A) + \int_A |f(y)|\,dy\\ &\le N\delta + \varepsilon/2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Twierdzenie **36.** *Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:*

(a) $f \in AC[a,b]$;

(b) funkcja f ma pochodną p.w. na $[a,b]$, $f' \in L^1[a,b]$ oraz

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)\,dy \qquad (x \in [a,b]).$$

(c) istnieje $g \in L^1[a,b]$ taka, że

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(y)\,dy \qquad (x \in [a,b]).$$

Dowód. (a) $\Longrightarrow$ (b): Załóżmy, że $f \in AC[a,b]$. Wówczas z wniosku 32 wynika, że f' istnieje p.w. na $[a,b]$ oraz $f' \in L^1[a,b]$. Określmy funkcję

$$h(x) = f(a) + \int_a^x f'(y)\,dy, \qquad (x \in [a,b]).$$

Z twierdzenia 35 $h \in AC[a,b]$, a z wniosku 26 $h' = f'$ p.w. Wobec tego funkcja $h - f$ jest absolutnie ciągła i jej pochodna jest równa zero p.w. Z lematu 33 wynika, że $h - f$ jest funkcją stałą, a ponieważ $(h-f)(a) = 0$, więc $f = h$.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Oczywiste, bierzemy $g = f'$.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Wynika natychmiast z twierdzenia 35. $\square$ — 4 XI 2021

8 Uzupełnienia (bez dowodów)

Niech $\mathcal{M}$ będzie σ-ciałem podzbiorów zbioru X.

Funkcję $\mu : \mathcal{M} \to [0,\infty]$ nazywamy *miarą*, lub *miarą dodatnią*, jeśli jest σ-addytywna oraz $\mu(\emptyset) = 0$. Funkcję $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ nazywamy *miarą zespoloną*, jeśli jest σ-addytywna.

Zwróćmy uwagę, że nie każda miara dodatnia jest miarą zespoloną, bo $[0,\infty]$ nie jest podzbiorem $\mathbb{C}$.

Dla miary zespolonej μ określamy jej *wariację* (*miarę wariacji*) $|\mu|$ wzorem

$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \qquad E \in \mathcal{M},$$

gdzie supremum jest wzięte po wszystkich *rozkładach* $\{E_i\}$ zbioru E, tj. po przeliczalnych rodzinach $\{E_i\}$ zbiorów z $\mathcal{M}$, które są parami rozłączne oraz spełniają $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$.

Twierdzenie **37.** *Wariacja $|\mu|$ miary zespolonej określonej na $\mathcal{M}$ jest miarą dodatnią i skończoną na $\mathcal{M}$.*

Dowód. Zobacz [4, Twierdzenia 6.2 i 6.4]. $\square$

Definicja **38.** *[1, rozdział 12.8] Niech*

$$\mathrm{NBV}[a,b] = \{f \in \mathrm{BV}[a,b] : f \textit{ jest prawostronnie ciągła na } (a,b) \textit{ oraz } f(a) = 0\}.$$

Twierdzenie **39.** *(a) Jeśli μ jest zespoloną miarą borelowską na $[a, b]$ oraz*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ \mu([a, x]), & x \in (a, b], \end{cases}$$

to $f \in \mathrm{NBV}[a, b]$.

(b) Jeśli $f \in \mathrm{NBV}[a, b]$, to istnieje dokładnie jedna zespolona miara borelowska μ na $[a, b]$ taka, że

$$f(x) = \mu([a, x]), \quad (x \in (a, b]).$$

Dla tej miary μ zachodzi

$$V(f; a, x) = |\mu|([a, x]), \quad (x \in (a, b]).$$

(c) Niech f i μ będą jak powyżej. Wówczas

(i) f jest ciągła w punkcie $x \in [a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(\{x\}) = 0$;

(ii) $f \in AC[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|\mu| << \lambda$.

Dowód. Zobacz [4, Twierdzenie 8.14], jednak konieczne są pewne modyfikacje związane z tym, że w Rudinie jest inna definicja NBV, nie na odcinku $[a, b]$, tylko na prostej $\mathbb{R}$, ponadto zamiast prawostronnej ciągłości jest założenie lewostronnej ciągłości. □

Twierdzenie **40** (F. Riesz, 1909)**.** *Rozważamy przestrzeń $C[a, b]$ zespolonych funkcji ciągłych na $[a, b]$ z normą supremum. Jeśli $\phi \in C[a, b]^*$, to istnieje jedyna zespolona miara borelowska μ na $[a, b]$ taka, że*

$$\phi(g) = \int g \, d\mu, \quad (g \in C[a, b]).$$

Na odwrót, jeśli μ jest zespoloną miarą borelowską na $[a, b]$, to funkcjonał ϕ określony powyższym wzorem jest liniowy i ciągły (tj. należy do $C[a, b]^*$).

W oryginalnym sformułowaniu zamiast miary μ i całki względem niej występowała funkcja $f \in \mathrm{NBV}[a, b]$ oraz całka Riemanna–Stieltjesa $\int g \, df$.

Literatura

[1] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, and B. S. Thomson. *Real Analysis.* Second edition, 2008. URL: http://classicalrealanalysis.info/Real-Analysis.php.

[2] P. Hajłasz. Lecture notes: Harmonic analysis. URL: http://www.pitt.edu/~hajlasz/Notatki/Harmonic%20Analysis4.pdf.

[3] W. Rudin. *Podstawy analizy matematycznej.* 1969.

[4] W. Rudin. *Analiza rzeczywista i zespolona.* 1986.

[5] E. M. Stein. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[6] Wikipedia. Vitali covering lemma — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Vitali%20covering%20lemma&oldid=1034485258, 2021. [Online; dostęp 2021-10-02].