Analiza rzeczywista i zespolona

Notatki do wykładu[1]

17 Metoda I konstrukcji miary zewnętrznej

Jak pamiętamy, twierdzenie Carathéodory'ego pozwala otrzymać miarę z miary zewnętrznej. Celem tego rozdziału jest podanie dość ogólnej metody konstrukcji miary zewnętrznej.

Definicja **1.** *Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X taką, że $\emptyset \in \mathcal{T}$. Funkcję $\tau : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ taką, że $\tau(\emptyset) = 0$ nazywamy premiarą, a rodzinę $\mathcal{T}$ – powłoką na X.*

Twierdzenie **2.** *(I metoda konstrukcji miary zewnętrznej) Niech $\mathcal{T}$ będzie powłoką na X oraz niech $\tau : \mathcal{T} \to [0, \infty]$ spełnia $\tau(\emptyset) = 0$. (czyli zakładamy, że τ jest premiarą). Dla $A \subset X$ połóżmy*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \tau(T_n) : T_n \in \mathcal{T} \text{ oraz } A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right\},$$

przy czym $\inf \emptyset = \infty$. Wtedy μ^* jest miarą zewnętrzną na X.

Uwaga **3.** *Zauważmy, że jeśli zbioru A nie da się pokryć przeliczalną liczbą podzbiorów z powłoki $\mathcal{T}$, to infimum w powyższej definicji jest ze zbioru pustego, a więc $\mu^*(A) = \infty$. Ponadto zauważmy, że ponieważ $\emptyset \in \mathcal{T}$ oraz $\tau(\emptyset) = 0$, więc skończone pokrycia zbioru A są (efektywnie) również brane pod uwagę.*

Dowód. Oczywiście $\mu^*(\emptyset) = 0$ oraz $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, jeśli $A \subset B \subset X$. Pozostaje więc sprawdzić przeliczalną podaddytywność μ^*. Niech $A_n \subset X$. Musimy wykazać, że

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{1}$$

Jeśli $\mu^*(A_n) = \infty$ dla pewnego n, to powyższa nierówność zachodzi. Załóżmy więc, że $\mu^*(A_n) < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg $\{T_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ zbiorów z $\mathcal{T}$ taki, że $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{n,k}$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_{n,k}) \le \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Zachodzi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} T_{n,k},$$

[1] skompilował Bartłomiej Dyda

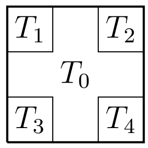
więc

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(T_{n,k}) \le \sum_{n=1}^{\infty}(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon,$$

a stąd z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy nierówność (1). □

Przykład **4.** *Niech $X = \mathbb{R}^2$, niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich kwadratów otwartych, $\tau(T) = \mathrm{diam}(T)$.*

Niech $T_0 \in \mathcal{T}$ ma bok długości 3, a zawarte w nim kwadraty T_1, T_2, T_3, $T_4 \in \mathcal{T}$ – boki długości 1, zobacz rysunek. Wówczas



$$\tau(T_0) = 3\sqrt{2}, \quad \tau(T_i) = \sqrt{2}, \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Sprawdzimy, że $\mu^*(T) = \tau(T)$ dla $T \in \mathcal{T}$. Niech $E_n \in \mathcal{T}$ będzie pokryciem kwadratu $T \in \mathcal{T}$, oznaczając przez λ miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}^2$ otrzymujemy[2]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2\lambda(E_n)} \ge \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2\lambda(E_n)}\right)^2\right)^{1/2} \ge (2\lambda(T))^{1/2} = \tau(T),$$

skąd $\mu^*(T) \ge \tau(T)$. Ponieważ ciąg zbiorów $(T, \emptyset, \emptyset, \ldots)$ jest pokryciem zbioru T, wiec również $\mu^*(T) \le \tau(T) + \tau(\emptyset) + \tau(\emptyset) + \ldots = \tau(T)$. Zatem istotnie $\mu^*(T) = \tau(T)$.

Zachodzi

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{4} T_i\right) \le \mu^*(T_0) = 3\sqrt{2} < 4\sqrt{2} = \sum_{i=1}^{4} \mu^*(T_i),$$

więc przynajmniej jeden ze zbiorów T_i (i = 1,2,3,4) jest niemierzalny. Ze względu na niezmienniczość na przesunięcia, żaden ze zbiorów T_i nie jest mierzalny. Podobnie można pokazać, że żaden niepusty kwadrat $T \in \mathcal{T}$ nie jest mierzalny.

W tym przykładzie miara zewnętrzna μ^* nie jest addytywna w przypadku zbiorów T_i (i = 1,2,3,4), mimo że są one od siebie oddzielone (tj. odległość między nimi jest dodatnia). Jest to inna sytuacja niż w przypadku zewnętrznej miary Lebesgue'a. Ponadto, zbiory otwarte nie muszą być mierzalne.

— 16 XII 2021

18 Zewnętrzne miary metryczne

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Określamy odległość między zbiorami następująco

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}, \qquad (A, B \subset X),$$
$$\mathrm{dist}(x, A) = \mathrm{dist}(\{x\}, A), \qquad (x \in X, A \subset X).$$

[2] Korzystamy po drodze ze znanej nierówności między normami: $\|a\|_{\ell^1} \ge \|a\|_{\ell^2}$ dla ciągów $a \in \ell^1$ (czyli ciągów bezwzględnie sumowalnych).

DEFINICJA **5.** *Niech* μ^* *będzie miarą zewnętrzną na przestrzeni metrycznej* (X, ρ)*. Jeśli* $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ *dla każdej pary zbiorów* $A, B \subset X$ *takich, że* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$*, to* μ^* *nazywamy* metryczną miarą zewnętrzną.

LEMAT **6.** *Niech* μ^* *będzie zewnętrzną miarą metryczną na przestrzeni* (X, ρ)*. Niech* $G \subset X$ *będzie zbiorem otwartym,* $G \neq X$ *oraz* $A \subset G$*. Niech*

$$A_n = \{x \in A : \operatorname{dist}(x, G^c) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Wtedy $\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$*.*

Dowód. Istnienie granicy wynika z monotoniczności μ^* i faktu, że $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ponieważ $A_n \subset A$, więc $\mu^*(A) \geq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n)$. Pozostaje pokazać, że

$$\mu^*(A) \leq \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n). \tag{2}$$

Zbiór G jest otwarty, a więc $\operatorname{dist}(x, G^c) > 0$ dla każdego $x \in A$. Zatem $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Niech

$$B_n = A_{n+1} \setminus A_n = \{x \in A : \tfrac{1}{n+1} \leq \operatorname{dist}(x, G^c) < \tfrac{1}{n}\}.$$

Wtedy

$$A = A_{2n} \cup \bigcup_{k=2n}^{\infty} B_k = A_{2n} \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} B_{2k} \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} B_{2k+1},$$

skąd

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A_{2n}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(B_{2k}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(B_{2k+1}).$$

Jeśli oba szeregi $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_{2k})$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_{2k+1})$ są zbieżne, to ich ogony $\sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(B_{2k})$ oraz $\sum_{k=n}^{\infty} \mu^*(B_{2k+1})$ zbiegają do zera przy $n \to \infty$, a więc z powyższej nierówności otrzymujemy (2).

Pozostaje do rozważenia przypadek, gdy któryś z tych szeregów jest rozbieżny – załóżmy na przykład, że $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_{2k}) = \infty$ (dowód w drugim przypadku jest podobny). Z definicji zbiorów B_k zachodzi, dla $x \in \bigcup_{j=1}^{k} B_{2j}$ oraz $y \in B_{2k+2}$,

$$\tfrac{1}{2k+1} \leq \operatorname{dist}(x, G^c) \leq \rho(x, y) + \operatorname{dist}(y, G^c) < \rho(x, y) + \tfrac{1}{2k+2},$$

skąd

$$\rho(x, y) > \tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2k+2},$$

a w konsekwencji

$$\operatorname{dist}(\bigcup_{j=1}^{k} B_{2j}, B_{2k+2}) \geq \tfrac{1}{2k+1} - \tfrac{1}{2k+2} > 0.$$

Teraz skorzystamy z założenia, że μ^* jest zewnętrzną miarą metryczną; dostajemy

$$\mu^*(A_{2n}) \geq \mu^*(\bigcup_{k=1}^{n-1} B_{2k}) = \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(B_{2k}).$$ [3]

[3] Tutaj wielokrotnie korzystamy z tego założenia, najpierw dla zbiorów $\bigcup_{k=1}^{n-2} B_{2k}$ oraz B_{2n-2}, które jak wcześniej sprawdziliśmy, są oddzielone. Formalnie należałoby przeprowadzić dowód indukcyjny.

Po przejściu $n \to \infty$ otrzymujemy,

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_{2n}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \mu^*(B_{2k}) = \infty,$$

a więc (2) zachodzi. □

TWIERDZENIE **7.** *Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na przestrzeni metrycznej (X, ρ). Wtedy każdy zbiór borelowski jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy μ^* jest metryczną miarą zewnętrzną.*

Dowód. ($\Longleftarrow$) Załóżmy, że μ^* jest metryczną miarą zewnętrzną. Wystarczy udowodnić, że zbiory domknięte są mierzalne. Niech F będzie niepustym zbiorem domkniętym, wtedy $G = F^c \neq X$ jest otwarty. Niech $E \subset X$ będzie dowolnym zbiorem, niech $A = E \setminus F \subset G$ i niech A_n będą jak w poprzednim lemacie, tj.

$$A_n = \{x \in A : \mathrm{dist}(x, G^c) \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Wtedy $\mathrm{dist}(A_n, F) \geq \frac{1}{n}$ oraz (na mocy lematu)

$$\mu^*(E \setminus F) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n).$$

Ponieważ μ^* jest metryczną miarą zewnętrzną, a $\mathrm{dist}(A_n, E\cap F) \geq \mathrm{dist}(A_n, F) > 0$, więc

$$\mu^*(E) \geq \mu^*((E \cap F) \cup A_n) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(A_n),$$

skąd po przejściu z $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F).$$

Odwrotna nierówność jest oczywista, otrzymujemy więc, że

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \setminus F).$$

Z dowolności zbioru E wynika, że F jest mierzalny.

($\Longrightarrow$) Załóżmy, że każdy zbiór borelowski jest mierzalny. Niech $A_1, A_2 \subset X$ będą takie, że $\mathrm{dist}(A_1, A_2) = \gamma > 0$. Określmy zbiór G następująco,

$$G = \bigcup_{x\in A_1} B(x, \gamma/2),$$

gdzie $B(x, \gamma/2) = \{z \in X : \rho(x, z) < \gamma/2\}$ oznacza kulę otwartą o środku w punkcie x i promieniu $\gamma/2$. Zbiór G jest otwarty (jako suma mnogościowa zbiorów otwartych $B(x, \gamma/2)$) oraz $A_1 \subset G$ i $G \cap A_2 = \emptyset$. Skoro G jest mierzalny, to spełnia

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap G) + \mu^*((A_1 \cup A_2) \cap G^c).$$

Ale

$$\begin{aligned}(A_1 \cup A_2) \cap G &= (A_1 \cap G) \cup (A_2 \cap G) = A_1 \cup \emptyset = A_1,\\ (A_1 \cup A_2) \cap G^c &= (A_1 \cap G^c) \cup (A_2 \cap G^c) = \emptyset \cup A_2 = A_2,\end{aligned}$$

więc

$$\mu^*(A_1 \cup A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),$$

co oznacza, że μ^* jest metryczną miarą zewnętrzną. □

19 Metoda II konstrukcji miary zewnętrznej

W przykładzie 4 widzieliśmy, że metoda I zastosowana do przestrzeni metrycznej może dać miarę zewnętrzną, dla której (niektóre) zbiory otwarte są niemierzalne. Metoda II, mająca (w przeciwieństwie do metody I) zastosowanie tylko do przestrzeni metrycznych, pozwala skonstruować metryczną miarę zewnętrzną, dzięki czemu unikamy problemu jak w przykładzie 4. Pomysł polega na wymuszeniu użycia „małych" (w sensie średnicy) zbiorów w pokryciach.

Niech premiara τ będzie zdefiniowana na powłoce $\mathcal{T}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$\mathcal{T}_n = \{T \in \mathcal{T} : \operatorname{diam}(T) \leq \tfrac{1}{n}\}$$

oraz konstruujemy miarę zewnętrzną μ_n^* za pomocą metody I zastosowanej do premiary τ i powłoki $\mathcal{T}_n$, tzn. kładziemy

$$\mu_n^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k) : T_k \in \mathcal{T}_n \text{ oraz } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right\}.$$

Ponieważ $\mathcal{T}_{n+1} \subset \mathcal{T}_n$, więc $\mu_{n+1}^*(E) \geq \mu_n^*(E)$, a zatem granica $\lim_{n\to\infty} \mu_n^*(E)$ istnieje dla każdego $E \subset X$. Funkcję

$$\mu_0^*(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n^*(E), \qquad (E \subset X),$$

nazywamy miarą zewnętrzną wyznaczoną metodą II z premiary τ oraz powłoki $\mathcal{T}$. Poniższe twierdzenie orzeka, że ta nazwa jest uzasadniona. — 20 XII 2021

TWIERDZENIE **8.** *Niech funkcja μ_0^* będzie taka jak wyżej. Wówczas μ_0^* jest metryczną miarą zewnętrzną.*

Dowód. Najpierw wykażemy, że μ_0^* jest miarą zewnętrzną. Własności $\mu_0^*(\emptyset) = 0$ oraz $\mu_0^*(A) \leq \mu_0^*(B)$ dla $A \subset B \subset X$ wynikają natychmiast z odpowiednich własności miar zewnętrznych μ_n^*. Sprawdzimy przeliczalną podaddytywność. Niech $A_n \subset X$. Ponieważ $\mu_0^*(E) \geq \mu_n^*(E)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego zbioru $E \subset X$, więc

$$\mu_n^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n^*(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(A_k).$$

Puszczając $n \to \infty$ otrzymujemy

$$\mu_0^*\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_0^*(A_k).$$

To oznacza, że μ_0^* istotnie jest miarą zewnętrzną.

Niech teraz $A, B \subset X$ będą dowolnymi oddzielonymi zbiorami (tzn. $\operatorname{dist}(A, B) > 0$). Pozostaje wykazać, że

$$\mu_0^*(A \cup B) \geq \mu_0^*(A) + \mu_0^*(B), \tag{3}$$

ponieważ nierówność w przeciwną stronę jest oczywista. Możemy założyć, że $\mu_0^*(A \cup B) < \infty$. Wybierzmy $N \in \mathbb{N}$ na tyle duże, aby $\operatorname{dist}(A, B) > 1/N$.

Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje ciąg zbiorów $(T_{n,k})_k$ z powłoki $\mathcal{T}_n$ taki, że

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{n,k} \supset A \cup B,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_{n,k}) \leq \mu_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Dalej rozważamy tylko $n \geq N$. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $\operatorname{diam}(T_{n,k}) \leq 1/n \leq 1/N$. Ponieważ $\operatorname{dist}(A, B) > 1/N$, więc $T_{n,k} \cap A = \emptyset$ lub $T_{n,k} \cap B = \emptyset$. Niech

$$\mathbb{N}_1 = \{k \in \mathbb{N} : T_{n,k} \cap A \neq \emptyset\},$$
$$\mathbb{N}_2 = \{k \in \mathbb{N} : T_{n,k} \cap B \neq \emptyset\}.$$

(Zbiory te zależą od $n \geq N$, czego nie uwzględniamy w notacji). Zachodzi

$$\mu_n^*(A) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_1} \tau(T_{n,k}) \quad \text{oraz} \quad \mu_n^*(B) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_2} \tau(T_{n,k}).$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$\mu_n^*(A) + \mu_n^*(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_{n,k}) \leq \mu_n^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy, dla $n \geq N$,

$$\mu_n^*(A) + \mu_n^*(B) \leq \mu_n^*(A \cup B).$$

Przechodząc do granicy $n \to \infty$ otrzymujemy (3). □

20 Miary Hausdorffa

Zaczniemy od przykładu podobnego do przykładu 4, jednak tym razem użyjemy metody II i innej powłoki (choć można by użyć takiej samej powłoki jak poprzednio).

Niech λ oznacza miarę Lebesgue'a na $\mathbb{R}^2$. Weźmy $X = \mathbb{R}^2$ oraz

$$\mathcal{T} = \{T \subset \mathbb{R}^2 : T \text{ jest zbiorem otwartym}\},$$

oraz rozważmy następujące trzy premiary.

1. Niech $s < 2$ oraz
$$\tau(T) = \operatorname{diam}(T)^s.$$
Jeżeli $T \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym i niepustym, oraz $T \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ dla pewnych zbiorów $T_k \in \mathcal{T}_n$, to
$$\begin{aligned}\lambda(T) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(T_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(T_k))^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-s}} \operatorname{diam}(T_k)^s = \frac{1}{n^{2-s}} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(T_k)^s;\end{aligned}$$

po drodze skorzystaliśmy z tego, że $\lambda(T_k) \leq (\operatorname{diam}(T_k))^2$, co bierze się stąd, że zbiór T_k zawiera się w pewnym kwadracie o boku długości $\operatorname{diam}(T_k)$. Z powyższej nierówności wynika, że

$$\mu_n^*(T) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(T_k)^s \geq n^{2-s}\lambda(T).$$

Puszczając $n \to \infty$ otrzymujemy, że $\mu_0^*(T) = \infty$.

2. Niech teraz $s > 2$ oraz

$$\tau(T) = (\operatorname{diam}(T))^s.$$

Niech $T_0 = (0,1)^2$. Zbiór T_0 możemy pokryć $(n+1)^2$ otwartymi kwadratami o bokach długości $1/n$ i średnicy $\frac{\sqrt{2}}{n}$. Zauważmy, że

$$\frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\sqrt{2}}} \leq \frac{1}{\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \rfloor},$$

wobec tego kwadraty te należą do powłoki $\mathcal{T}_m$, gdzie $m = \lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \rfloor$. Stąd

$$\mu_m^*(T_0) \leq (n+1)^2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{n})^s \to 0, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Zatem $\mu_0^*(T_0) = 0$. Podobnie jest dla każdego innego kwadratu, a więc z przeliczalnej podaddytywności również $\mu_0^*(\mathbb{R}^2) = 0$.

3. Niech

$$\tau(T) = (\operatorname{diam}(T))^2$$

oraz $T_0 = (0,1)^2$. Rozważając takie pokrycie jak poprzednio widzimy, że

$$\mu^*_{\lfloor \frac{n}{\sqrt{2}} \rfloor}(T_0) \leq (n+1)^2 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{n})^2 \to 2, \quad \text{gdy } n \to \infty.$$

Zatem $\mu_0^*(T_0) \leq 2 = 2\lambda(T_0)$. Z drugiej strony, jeśli $T_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$ dla pewnych zbiorów $T_k \in \mathcal{T}_n$, to

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(T_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(T_k))^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(T_k) \geq \lambda(T_0),$$

a zatem

$$\lambda(T_0) \leq \mu_0^*(T_0) \leq 2\lambda(T_0).$$

Wprowadzimy teraz ogólną definicję.

Definicja **9.** *Niech X będzie przestrzenią metryczną, a $\mathcal{T}$ – rodziną wszystkich zbiorów otwartych w X. Niech $s > 0$, przyjmijmy*

$$\tau(T) = (\operatorname{diam}(T))^s, \qquad (T \in \mathcal{T}).$$

Miarę zewnętrzną $\mu^{*(s)}$ otrzymaną z premiary τ metodą II nazywamy zewnętrzną miarą Hausdorffa wymiaru s*, a odpowiadającą jej miarę $\mu^{(s)}$ –* s-wymiarową miarą Hausdorffa*. Czasami pomijamy wymiar s w nazwie i mówimy o (zewnętrznej) mierze Hausdorffa, jeśli wymiar nie ma znaczenia lub z kontekstu jest jasne, o jakie s chodzi.*

Uwaga **10.** *Na mocy twierdzenia 8, zewnętrzna miara Hausdorffa jest zewnętrzną miarą metryczną, a stad z twierdzenia 7 zbiory borelowskie są mierzalne. Wobec tego miara Hausdorffa jest określona przynajmniej na σ-ciele zbiorów borelowskich.*

Jak zobaczyliśmy w przykładzie powyżej, na $\mathbb{R}^2$:

1. jeśli $s < 2$, to s-wymiarowa miara Hausdorffa jest nieskończona na niepustych zbiorach otwartych;

2. jeśli $s > 2$, to s-wymiarowa miara Hausdorffa jest zerowa, $\mu^{(s)}(\mathbb{R}^2) = 0$;

3. jeśli $s = 2$, to s-wymiarowa miara Hausdorffa spełnia

$$\lambda(T_0) \leq \mu^{(s)}(T_0) \leq 2\lambda(T_0).$$

   Powyższą nierówność wykazaliśmy tylko dla kwadratu $T_0 = (0,1)^2$, jednak zachodzi ona dla dowolnych zbiorów otwartych $T_0 \subset \mathbb{R}^2$ (a w konsekwencji również dla dowolnych zbiorów borelowskich).

To oznacza, że dla ustalonego niepustego zbioru otwartego $T \subset \mathbb{R}^2$ zachodzi

$$\mu^{(s)}(T) = \begin{cases} \infty, & \text{jeśli } s < 2; \\ 0, & \text{jeśli } s > 2. \end{cases}$$

W takiej sytuacji jak wyżej będziemy mówili, że zbiór T ma *wymiar Hausdorffa* równy 2. Później zobaczymy, że funkcja $s \mapsto \mu^{(s)}(T)$ zachowuje się podobnie w dowolnym przypadku (zbioru T i przestrzeni metrycznej X).

Uwaga **11.** *Jeśli w definicji miary Hausdorffa weźmiemy $\mathcal{T} = 2^X$ zamiast rodziny wszystkich zbiorów otwartych, to w wyniku otrzymamy tę samą miarę. Wynika to z faktu, że dla dowolnych $s > 0$, $\varepsilon > 0$ i dowolnego zbioru $E \subset X$, istnieje zbiór otwarty $G \supset E$ taki, że*

$$\operatorname{diam}(G)^s \leq \operatorname{diam}(E)^s + \varepsilon.$$

Tak jest z kolei dlatego, że jeśli $G_n = \bigcup_{x\in E} B(x, \frac{1}{n})$, to zbiory G_n są otwarte, $E \subset G_n$ oraz $\operatorname{diam}(G_n) \leq \operatorname{diam}(E) + \frac{2}{n}$. Zatem $G = G_n$ dla odpowiednio dużego n ma żądane własności.

Lemat **12.** *Jeśli S jest podobieństwem w skali $\kappa > 0$, tzn.*

$$\rho(S(x), S(y)) = \kappa\rho(x,y), \qquad (x, y \in X),$$

to

$$\mu^{*(s)}(S(E)) = \kappa^s \mu^{*(s)}(E), \qquad (E \subset X).$$

Dowód. Jeżeli $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty T_i$, gdzie $T_i \in \mathcal{T}_n$, to $S(E) \subset S(\bigcup_{i=1}^\infty T_i) = \bigcup_{i=1}^\infty S(T_i)$ oraz

$$\operatorname{diam}(S(T_i)) = \kappa \operatorname{diam}(T_i) \leq \frac{\kappa}{n} = \frac{1}{\frac{n}{\kappa}} \leq \frac{1}{\lfloor \frac{n}{\kappa} \rfloor}, \qquad (n \geq \kappa).$$

Wobec tego dla $n \geq \kappa$, każdemu pokryciu $(T_i) \subset \mathcal{T}_n$ zbioru E odpowiada pokrycie $(S(T_i)) \subset \mathcal{T}_{\lfloor \frac{n}{\kappa} \rfloor}$ zbioru $S(E)$. Stąd

$$\mu^{*(s)}_{\lfloor \frac{n}{\kappa} \rfloor}(S(E)) \leq \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(S(T_i))^s = \kappa^s \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(T_i)^s,$$

biorąc infimum po (T_i),

$$\mu^{*(s)}_{\lfloor \frac{n}{\kappa} \rfloor}(S(E)) \le \kappa^s \mu^{*(s)}_n(E).$$

Przechodząc do granicy z $n \to \infty$,

$$\mu^{*(s)}(S(E)) \le \kappa^s \mu^{*(s)}(E). \tag{4}$$

Korzystając z (4) dla zbioru $S(E)$ w miejsce E oraz odwzorowania S^{-1} (które jest podobieństwem w skali κ^{-1}) w miejsce S otrzymujemy

$$\mu^{*(s)}(S^{-1}(S(E))) \le \kappa^{-s} \mu^{*(s)}(S(E)).$$

Ale $S^{-1}(S(E)) = E$, więc powyższa nierówność wraz z (4) daje tezę. □ — 4 I 2022

LEMAT **13.** *Niech (X, ρ_X) oraz (Y, ρ_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Niech $\alpha > 0$, $E \subset X$ oraz funkcja $f : E \to Y$ będą takie, że*

$$\rho_Y(f(x), f(y)) \le c(\rho_X(x, y))^\alpha, \qquad (x, y \in E).$$

Wówczas dla każdego $s > 0$ zachodzi

$$\mu^{*(s/\alpha)}(f(E)) \le c^{s/\alpha} \mu^{*(s)}(E).$$

Dowód. Niech $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty T_i$, gdzie $T_i \in \mathcal{T}_n$, przy czym tym razem rozważamy $\mathcal{T} = 2^X$ w definicji miary Hausdorffa, zgodnie z uwagą 11. Ponieważ

$$\operatorname{diam}(f(E \cap T_i)) \le c \operatorname{diam}(E \cap T_i)^\alpha \le c \operatorname{diam}(T_i)^\alpha \le \frac{c}{n^\alpha} \le \frac{1}{\lfloor \frac{n^\alpha}{c} \rfloor},$$

więc $f(E \cap T_i) \in \mathcal{T}_m$, gdzie $m = \lfloor \frac{n^\alpha}{c} \rfloor$. Rozważamy tutaj n na tyle duże, by $n^\alpha \ge c$. Ponadto $f(E) \subset \bigcup_{i=1}^\infty f(E \cap T_i)$. Stąd

$$\mu^{*(s/\alpha)}_m(f(E)) \le \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(f(E \cap T_i))^{s/\alpha} \le c^{s/\alpha} \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(T_i)^s.$$

Biorąc infimum po wszystkich pokryciach (T_i) jak wyżej, otrzymujemy

$$\mu^{*(s/\alpha)}_m(f(E)) \le c^{s/\alpha} \mu^{*(s)}_n(E).$$

Jeśli $n \to \infty$, to też $m \to \infty$, więc z powyższej nierówności otrzymujemy tezę. □

TWIERDZENIE **14.** *Jeżeli $\mu^{*(s)}(E) < \infty$, to $\mu^{*(t)}(E) = 0$ dla $t > s$.*

Dowód. Niech $E \subset \bigcup_{i=1}^\infty T_i$, gdzie $T_i \in \mathcal{T}_n$. Wówczas

$$\mu^{*(t)}(E) \le \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(T_i)^t = \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(T_i)^{t-s} \operatorname{diam}(T_i)^s \le \frac{1}{n^{t-s}} \sum_{i=1}^\infty \operatorname{diam}(T_i)^s.$$

Biorąc infimum po wszystkich pokryciach (T_i) otrzymujemy

$$\mu^{*(t)}_n(E) \le \frac{1}{n^{t-s}} \mu^{*(s)}_n(E),$$

skąd przechodząc z $n \to \infty$ otrzymujemy tezę. □

Wniosek **15.** *Jeżeli* $\mu^{*(t)}(E) > 0$*, to* $\mu^{*(s)}(E) = \infty$ *dla* $s < t$*.*

Definicja **16.** *Niech* $E \subset X$*. Jeżeli* $\mu^{*(s)}(E) < \infty$ *dla każdego* $s > 0$*, to przyjmujemy* $\dim_H(E) = 0$*, w przeciwnym przypadku*

$$\dim_H(E) = \sup\{s > 0 : \mu^{*(s)}(E) = \infty\}.$$

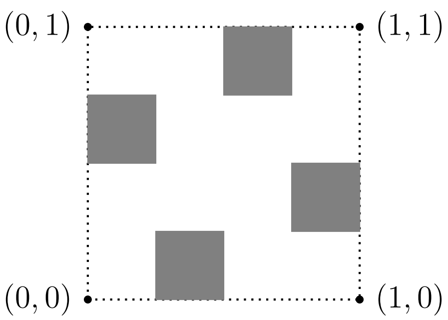
Wielkość $\dim_H(E) \in [0, \infty]$ *nazywamy* wymiarem Hausdorffa *zbioru* E*.*

Uwaga **17.** *Z twierdzenia 14 oraz wniosku 15 wynika, że*

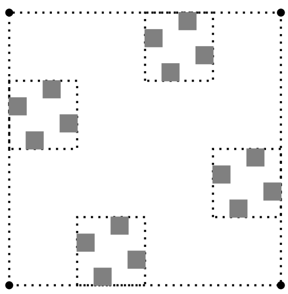
1. *jeśli* $\dim_H(E) = 0$*, to* $\mu^{*(s)}(E) = 0$ *dla każdego* $s > 0$*;*
2. *jeśli* $\dim_H(E) = \infty$*, to* $\mu^{*(s)}(E) = \infty$ *dla każdego* $s > 0$*;*
3. *jeśli* $d = \dim_H(E) \in (0, \infty)$*, to*

$$\mu^{*(s)}(E) = \begin{cases} \infty & \text{dla } s \in (0, d); \\ 0 & \text{dla } s \in (d, \infty). \end{cases}$$

Przykład **18.** *(Kurz Cantora)*



Zbiór E_1 *powstaje z kwadratu* $[0, 1]^2$ *przez podział na 16 małych kwadratów i pozostawienie 4 z nich, jak na rysunku.*



Zbiór E_2 *powstaje ze zbioru* E_1 *przez podział każdego z czterech małych kwadratów na 16 jeszcze mniejszych, i pozostawienie za każdym razem 4 z nich, jak na rysunku.*

Itd. Otrzymujemy zstępujący ciąg zbiorów zwartych $E_1, E_2, \ldots$*, kładziemy* $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$*.*

Pokażemy, że $\dim_H F = 1$ *oraz* $1 \leq \mu^{(1)}(F) \leq \sqrt{2}$*. Na każdym etapie mamy* 4^k *kwadratów o boku* 4^{-k}*, czyli średnicy* $4^{-k}\sqrt{2}$*. Są one pokryciem z* $\mathcal{T}_n$*, gdzie* $n = \lfloor \frac{4^k}{\sqrt{2}} \rfloor$*, więc*

$$\mu_n^{*(1)}(F) \leq 4^k \cdot 4^{-k}\sqrt{2} = \sqrt{2},$$

skąd $\mu^{*(1)}(F) \leq \sqrt{2}$*.*

Niech $P((x, y)) = x$ *będzie rzutem ortogonalnym na oś* X*. Ponieważ dla* $w, z \in \mathbb{R}^2$ *zachodzi*

$$|P(w) - P(z)| \leq |w - z|$$

oraz $P(F) = [0, 1]$*, więc z lematu 13 dostajemy*

$$\mu^{*(1)}(F) \geq \mu^{*(1)}([0, 1]) = 1.$$

Definicja 19. *Krzywą w* (X,ρ) *nazywamy funkcję ciągłą* $f:[0,1]\to X$*, a liczbę*

$$\sup\sum_{i=1}^m \rho(f(x_{i-1},x_i)),$$

gdzie supremum jest brane po wszystkich podziałach $0=x_0<x_1<\dots x_m=1$ *– jej* długością.

Twierdzenie 20. *Niech* $f:[0,1]\to X$ *będzie funkcją ciągłą i różną od stałej, a* l *niech będzie długością krzywej* f*. Wtedy dla* $C=f([0,1])$

1. $0<\mu^{(1)}(C)\le l$,
2. *jeśli* f *jest różnowartościowa, to* $\mu^{(1)}(C)=l$.

W szczególności jeśli $l<\infty$*, to* $\dim_H(C)=1$.

Dowód. Najpierw dowodzimy, że $\mu^{(1)}(C)\le l$. Załóżmy, że $l<\infty$. Niech $A_1,\dots,A_m$ – podłuki C, czyli $C=\bigcup_{i=1}^m A_i$ oraz $\mathrm{diam}(A_i)\le\frac{1}{n}$, $i=1,\dots,m$. Wtedy

$$\mu_n^{*(1)}(C)\le\sum_{i=1}^m \mathrm{diam}(A_i).$$

Ponieważ f jest jednostajnie ciągła, więc istnieje $\gamma>0$ taka, że

$$\rho(f(x),f(y))<\frac{1}{n},\quad \text{o ile } |x-y|<\gamma,\ x,y\in[0,1].$$

Niech $0=x_0<x_1<\dots x_m=1$ będą takie, że $|x_i-x_{i-1}|<\gamma$ $(i=1,\dots,m)$. Wtedy zbiory $A_i=f([x_{i-1},x_i])$ pokrywają C oraz są zwarte, więc istnieją punkty y_i,z_i takie, że $x_{i-1}\le y_i\le z_i\le x_i$ oraz $\mathrm{diam}\,A_i=\rho(f(y_i),f(z_i))$. Stąd

$$\frac{1}{n}>\rho(f(y_i),f(z_i))=\mathrm{diam}\,A_i\ge\rho(x_{i-1},x_i).$$

Rozważmy podział $0\le y_1\le z_2\le y_2\le z_2\le\dots\le y_m\le z_m\le 1$. Zachodzi

$$\mu_n^{*(1)}(C)\le\sum_{i=1}^m \mathrm{diam}(A_i)=\sum_{i=1}^m \rho(f(y_i),f(z_i))\le l,$$

więc $\mu^{*(1)}(C)=\lim_{n\to\infty}\mu_n^{*(1)}(C)\le l$, ponadto $\mu^{*(1)}(C)=\mu^{(1)}(C)$, bo C jest mierzalny.

Jeśli $0\le a<b\le 1$, to $\mu^{(1)}(f[a,b])\ge\rho(f(a),f(b))$ (co udowodnimy na ćwiczeniach); wybierając a,b tak, aby $f(a)\ne f(b)$ dostajemy, że $\mu^{(1)}(C)>0$. — 13 I 2022

Załóżmy teraz, że f jest różnowartościowa. Niech $0=x_0<x_1<\dots<x_m=1$. Wówczas $f([x_{i-1},x_i))$ są rozłącznymi zbiorami borelowskimi. Zatem

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m\rho(f(x_{i-1}),f(x_i))&\le\sum_{i=1}^m\mu^{(1)}(f([x_{i-1},x_i)))\\&=\mu^{(1)}(\bigcup_{i=1}^m f([x_{i-1},x_i)))=\mu^{(1)}(f([0,1)))=\mu^{(1)}(C),\end{aligned}$$

a ponieważ tak jest dla każdego podziału, to $l\le\mu^{(1)}(C)$, co w połączeniu z pierwszą częścią twierdzenia daje równość $l=\mu^{(1)}(C)$. □

Literatura

[1] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, and B. S. Thomson. *Real Analysis*. Second edition, 2008. URL: http://classicalrealanalysis.info/Real-Analysis.php.

[2] P. Sztonyk. Notatki do wykładu z analizy rzeczywistej i zespolonej. (niepublikowane).