Analiza rzeczywista i zespolona

Notatki do wykładu[1]

21 Systemy iteracyjne i zbiory samopodobne

Niech $D \subset \mathbb{R}^d$ będzie domknięty.

DEFINICJA **1.** *Odwzorowanie $S : D \to D$ nazywamy* kontrakcją *na D, gdy istnieje $c \in (0, 1)$ takie, że*

$$|S(x) - S(y)| \leq |x - y|, \quad (x, y \in D). \tag{1}$$

W przypadku, gdy w (1) zachodzi zawsze równość, mówimy, że S jest podobieństwem zwężającym.

Skończoną rodzinę kontrakcji $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, $m \geq 2$ nazywamy systemem funkcji iterowanych (w skrócie, IFS). Niepusty i zwarty zbiór $F \subset D$ nazywamy *atraktorem* (*zbiorem niezmienniczym*) dla IFS, gdy

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

PRZYKŁAD **2.** *Jeśli $S_1(x) = \frac{x}{3}$, $S_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$ na $[0, 1]$, to zbiór Cantora F jest atraktorem dla IFS $\{S_1, S_2\}$. Istotnie, $F = S_1(F) \cup S_2(F)$.*

Udowodnimy, że każdy IFS ma dokładnie jeden atraktor.

Niech $\mathcal{S} = \{A \subset D : A \neq \emptyset\}$ będzie klasą wszystkich niepustych, zwartych podzbiorów D. Określamy δ-otoczkę zbioru A jako

$$A_\delta = \{x \in D : |x - a| \leq \delta \text{ dla pewnego } a \in A\}.$$

Następnie definiujemy

$$d(A, B) = \inf\{\delta > 0 : A \subset B_\delta \text{ oraz } B \subset A_\delta\}, \qquad (A, B \in \mathcal{S}).$$

Łatwo sprawdzić, że to jest metryka na $\mathcal{S}$, tzw. metryka Hausdorffa.

TWIERDZENIE **3.** *Niech $\{S_1, \dots, S_m\}$ będzie IFS na $D \subset \mathbb{R}^d$ takim, że*

$$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i|x - y|, \quad (x, y \in D),$$

gdzie $c_i \in (0, 1)$ $(i = 1, \dots, m)$. Wtedy istnieje jednoznacznie określony atraktor F, tzn. niepusty i zwarty zbiór taki, że

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

[1]skompilował Bartłomiej Dyda

Niech odwzorowanie $S : 2^{\mathcal{S}} \to 2^{\mathcal{S}}$ będzie określone wzorem

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E), \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

Wówczas dla każdego zbioru $E \in \mathcal{S}$ takiego, że $S_i(E) \subset E$ $(i = 1, \dots, m)$, zachodzi

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E).$$

Dowód. Niech $E = D \cap \overline{B(0,r)}$. Wówczas dla $y \in E$

$$|S_i(y)| \le |S_i(y) - S_i(0)| + |S_i(0)| \le c_i|y| + |S_i(0)| \le c_i r + |S_i(0)|,$$

więc $S_i(E) \subset B(0, |S_i(0)| + c_i r) \subset \overline{B(0,r)}$, jeśli tylko r jest dostatecznie duże (takie, by $|S_i(0)| + c_i r \le r$ dla wszystkich i). Dla tak dobranego r zachodzi $S_i(E) \subset E$ dla wszystkich i.

Stąd wynika, że $S(E) \subset E$, a w konsekwencji $S^k(E) \subset S^{k-1}(E)$. Zatem $(S^k(E))$ jest zstępującym ciągiem niepustych zbiorów zwartych, więc zbiór $F := \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$ jest zwarty i niepusty.

Na ćwiczeniach pokażemy, że F jest atraktorem, czyli że $F = S(F)$. Udowodnimy jeszcze jednoznaczność. Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$, to

$$d(S(A), S(B)) = d(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A), \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)) \le \max_{1 \le i \le m} d(S_i(A), S_i(B)),$$

bo jeśli δ-otoczka $(S_i(A))_\delta$ zawiera $S_i(B)$ (dla każdego $i = 1, \dots, m$), to $(\bigcup_{i=1}^{m} S_i(A))_\delta = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A)_\delta \supset \bigcup_{i=1}^{m} S_i(B)_\delta = (\bigcup_{i=1}^{m} S_i(B))_\delta$. Zatem

$$d(S(A), S(B)) \le (\max_{1 \le i \le m} c_i) d(A, B).$$

Jeśli A oraz B są atraktorami, czyli $S(A) = A$, $S(B) = B$, to $d(A,B) = d(S(A), S(B)) \le (\max_{1 \le i \le m} c_i) d(A,B)$, skąd wynika, że $d(A,B) = 0$. To z kolei oznacza, że $A = B$. $\square$

22 Wymiar zbiorów samopodobnych

Od teraz zakładamy, że

$$|S_i(x) - S_i(y)| = c_i|x - y|, \qquad (x, y \in D \subset \mathbb{R}^d),$$

gdzie $c_i \in (0,1)$. Atraktor takiego IFS nazywamy *zbiorem samopodobnym.*

Mówimy, że IFS $\{S_1, \dots, S_m\}$ spełnia *warunek otwartego zbioru*, jeśli istnieje niepusty, ograniczony zbiór otwarty $V \subset D$ taki, że

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \subset V \tag{2}$$

oraz zbiory $S_i(V)$ są parami rozłączne. — 20 I 2022

Twierdzenie 4. *Niech układ podobieństw S_i o skali $c_i \in (0,1)$ na $\mathbb{R}^d$ ($i = 1, \ldots, m$) spełnia warunek otwartego zbioru. Jeżeli F jest atraktorem IFS $\{S_1, \ldots, S_m\}$, tzn.*

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F),$$

to $\dim_H F = s$, gdzie s jest rozwiązaniem równania

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1. \tag{3}$$

Ponadto dla tej wartości s zachodzi $0 < \mu^{(s)}(F) < \infty$.

Dowód podzielimy na dwie części.

Dowód (część I – udowodnimy, że $\mu^{(s)}(F) \le (\operatorname{diam} F)^s$). Niech s spełnia równanie (3). Niech

$$I_k = \{1, 2, \ldots, m\}^k = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \le i_j \le m\}.$$

Dla zbioru A i ciągu $(i_1, \ldots, i_k) \in I_k$ określamy

$$A_{i_1,\ldots,i_k} = S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(A).$$

Wielokrotnie korzystając z równości $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$[2] otrzymujemy $F = \bigcup_{I_k} F_{i_1,\ldots,i_k}$.[3] Zachodzi

$$\begin{aligned}\sum_{I_k} \operatorname{diam}(F_{i_1,\ldots,i_k})^s &= \sum_{I_k} (c_{i_1} \cdot \ldots \cdot c_{i_k})^s (\operatorname{diam} F)^s \\ &= (\sum_{i_1} c_{i_1})^s \ldots (\sum_{i_k} c_{i_k})^s (\operatorname{diam} F)^s = (\operatorname{diam} F)^s.\end{aligned}$$

Dla każdej $\delta > 0$ możemy wybrać k takie, że $\operatorname{diam}(F_{i_1,\ldots,i_k}) \le (\max c_i)^k \operatorname{diam}(F) \le \delta$, więc $\mu_{1/n}^{(s)*}(F) \le (\operatorname{diam} F)^s$, a stąd $\mu^{(s)}(F) \le (\operatorname{diam} F)^s$. □

Będziemy potrzebowali następujących dwóch lematów.

Lemat 5 (Zasada rozkładu masy). *Załóżmy, że istnieją miara ν o nośniku zawartym w F taka, że $0 < \nu(F) < \infty$ (tzw. rozkład masy) oraz stałe $c > 0$ i $\varepsilon > 0$ takie, że*

$$\nu(U) \le c(\operatorname{diam} U)^s$$

dla wszystkich zbiorów otwartych U takich, że $\operatorname{diam} U \le \varepsilon$. Wtedy $\mu^{(s)}(F) \ge \nu(F)/c$ oraz $s \le \dim_H F$.

Dowód. Jeżeli $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, gdzie U_i są otwarte oraz $\operatorname{diam} U_i \le \frac{1}{n}$, to

$$0 < \nu(F) \le \nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \nu(U_i) \le c \sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_i)^s.$$

Biorąc infimum po wszystkich pokryciach (U_i) jak wyżej otrzymujemy, że

$$\nu(F) \le c\mu_{1/n}^{(s)*}(F),$$

skąd wynika teza. □

[2] A formalnie przeprowadzając dowód indukcyjny.

[3] Warto myśleć o przykładzie ze zbiorem Cantora F: używając notacji z przykładu 2 mamy na przykład, że F_1, $F_{1,2,2}$, $F_{1,2,2,1,2,1}$ są odcinkami złożonym z liczb o rozwinięciu trójkowym rozpoczynającym się (odpowiednio) od 0,0; 0,022; 0,022020.

Lemat 6. *Niech $\{V_i\}$ będą otwartymi, rozłącznymi podzbiorami $\mathbb{R}^d$ o takiej własności, że każdy zbiór V_i zawiera pewną kulę o promieniu $a_1 r$ oraz jest zawarty w pewnej kuli o promieniu $a_2 r$. Wówczas każda kula $B \subset \mathbb{R}^d$ o promieniu r przecina co najwyżej $(1+2a_2)^d a_1^{-d}$ zbiorów $\overline{V_i}$.*

Dowód. Na ćwiczeniach. □

Dowód (twierdzenia 4, część II – udowodnimy, że $\mu^{(s)}(F) > 0$). Niech

$$I = \bigtimes_{k=1}^{\infty} \{1, \ldots, m\} = \{(i_1, i_2, \ldots) : 1 \le i_j \le m\}.$$

Na zbiorze $X = \{1, \ldots, m\}$ wprowadzamy miarę probabilistyczną P kładąc $P(\{j\}) = c_j^s$. Stąd otrzymujemy miarę produktową $P_\infty = \bigtimes_{k=1}^{\infty} P$ na I, zachodzi

$$P_\infty(\{i_1\} \times \{i_2\} \times \ldots \times \{i_k\} \times X \times X \ldots) = c_1^s c_2^s \ldots c_k^s.$$

Określmy $f : I \to \mathbb{R}^d$ kładąc

$$f(i_1, i_2, \ldots) = x_{i_1, i_2, \ldots} \qquad ((i_1, i_2, \ldots) \in I),$$

gdzie $\{x_{i_1,i_2,\ldots}\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)$. Ta definicja jest poprawna, ponieważ zbiory $S_{i_1} \circ \ldots \circ S_{i_k}(F)$ są zwarte i niepuste oraz tworzą ciąg zstępujący o średnicach zbiegających do zera. Stąd wynika, że ich przekrój jest niepusty i ma średnicę zero, a więc jest singletonem.

Zauważmy, że funkcja f jest ciągła. Istotnie, ustalmy punkt $(i_1, i_2, \ldots) \in I$ oraz $\varepsilon > 0$. Istnieje k na tyle duże, aby $\operatorname{diam} F_{i_1,\ldots,i_k} < \varepsilon$. Biorąc $\delta > 0$ na tyle małą, aby punkty $y \in I$ leżące w odległości mniejszej niż δ od punktu $(i_1, i_2, \ldots)$ miały pierwszych k współrzędnych postaci $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ widzimy, że $f(y) \in F_{i_1,\ldots,i_k}$, a więc $|f(y) - f(x_{i_1,i_2,\ldots})| \le \operatorname{diam} F_{i_1,\ldots,i_k} < \varepsilon$.

Przenosimy miarę P_∞ na borelowskie podzbiory $A \subset \mathbb{R}^d$ w następujący sposób

$$\nu(A) := P_\infty(f^{-1}(A)) = P_\infty(\{(i_1, i_2, \ldots) : x_{i_1,i_2,\ldots} \in A\}).$$

Oczywiście $\nu(F) = P_\infty(I) = 1$, $\nu(\mathbb{R}^d \setminus F) = 0$.

Niech V będzie zbiorem otwartym jak w warunku otwartego zbioru (2). Ponieważ $S(\overline{V}) = \bigcup_{i=1}^m S_i(\overline{V}) \subset \bigcup_{i=1}^m \overline{S_i(V)} = \overline{\bigcup_{i=1}^m S_i(V)} \subset \overline{V}$, więc na mocy twierdzenia 3 $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} S^k(\overline{V})$. W szczególności $F \subset \overline{V}$ i $F_{i_1,\ldots,i_k} \subset \overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$ dla każdego ciągu $(i_1, \ldots, i_k)$.

Niech $B \subset \mathbb{R}^d$ będzie kulą o promieniu $r < 1$. Oszacujemy $\nu(B)$ rozważając zbiory $V_{i_1,\ldots,i_k}$ o średnicach porównywalnych z r i dokmnięciac przecinających $F \cap B$.

Niech $t = \min_{1 \le i \le m} c_i$. Obcinamy każdy ciąg $(i_1, i_2, \ldots) \in I$ po pierwszym i_k takim, że

$$tr \le c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k} \le r. \tag{4}$$

Niech Q oznacza (skończony) zbiór wszystkich takich skończonych ciągów. Wtedy dla każdego nieskończonego ciągu $(i_1, i_2, \ldots) \in I$ istnieje dokładnie jedna wartość k taka, że $(i_1, \ldots, i_k) \in Q$.

Z warunku otwartego zbioru wynika, że zbiory $V_1 = S_1(V)$, V_2, …, V_m są parami rozłączne. Iterując wnioskujemy, że również $V_{i_1,\ldots,i_p,1}$, $V_{i_1,\ldots,i_p,2}$, …, $V_{i_1,\ldots,i_p,m}$ są parami rozłączne. Zatem rodzina zbiorów otwartych

$$\{V_{i_1,\ldots,i_k} : (i_1, \ldots, i_k) \in Q\}$$

składa się ze zbiorów rozłącznych. Podobnie $F \subset \bigcup_Q F_{i_1,\ldots,i_k} \subset \bigcup_Q \overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$.

Wybieramy liczby a_1 i a_2 tak, aby zbiór V zawierał kulę o promieniu a_1 i był zawarty w kuli o promieniu a_2. Wtedy zbiór $V_{i_1,\ldots i_k}$ zawiera kulę o promieniu $c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}a_1 \geq tra_1$, a więc zawiera też kulę o promieniu tr. Ponadto zbiór ten jest zawarty w kuli o promieniu $c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k}a_2 \leq a_2r$, a więc jest też zawarty w kuli o promieniu a_2r. Niech Q_1 będzie zbiorem wszystkich ciągów $(i_1,\ldots,i_k) \in Q$ takich, że B przecina $\overline{V}_{i_1,\ldots,i_k}$. Z lematu 6 zbiór Q_1 ma co najwyżej $q = (1+2a_2)^d(ta_1)^{-d}$ elementów. Zatem

$$\begin{aligned}\nu(B) &= \nu(F\cap B) = \nu(\{(i_1,i_2,\ldots) : x_{i_1,i_2,\ldots} \in F\cap B\})\\ &\leq P_\infty\left(\bigcup_{Q_1}(\{i_1\}\times\ldots\times\{i_k\}\times X\times X\times\ldots)\right),\end{aligned}$$

bo jeżeli $x_{i_1,i_2,\ldots} \in F\cap B$, to istnieje k takie, że $(i_1,\ldots,i_k) \in Q_1$. Stąd

$$\begin{aligned}\nu(B) &\leq \sum_{Q_1} P_\infty(\{i_1\}\times\ldots\times\{i_k\}\times X\times X\times\ldots)\\ &= \sum_{Q_1}(c_{i_1}\ldots c_{i_k})^s \leq \sum_{Q_1} r^s \leq qr^s.\end{aligned}$$

Ponieważ każdy zbiór otwarty $U \subset \mathbb{R}^d$ o średnicy $\leq \varepsilon$ jest zawarty w kuli o promieniu ε, więc

$$\nu(U) \leq q(\operatorname{diam} U)^s.$$

Możemy więc skorzystać z lematu o rozkładzie masy, otrzymujemy $\mu^{(s)}(F) \geq \nu(F)/q = 1/q > 0$. □

— 27 I 2022, koniec

Literatura

[1] A. M. Bruckner, J. B. Bruckner, and B. S. Thomson. *Real Analysis.* Second edition, 2008. URL: http://classicalrealanalysis.info/Real-Analysis.php.

[2] P. Sztonyk. Notatki do wykładu z analizy rzeczywistej i zespolonej. (niepublikowane).