Analiza rzeczywista i zespolona Lista 1

Dla funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ oznaczamy przez $V(f; a, \cdot)$ jej *funkcję wahania całkowitego*, określoną wzorem

$$V(f; a, z) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| : n \in \mathbb{N},\ a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = z \right\}, \qquad z \in [a, b].$$

Jeśli $V(f; a, b) < \infty$, to mówimy, że funkcja f ma *wahanie ograniczone* i piszemy $f \in \mathrm{BV}[a, b]$.

Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest *absolutnie ciągła* (piszemy $f \in AC[a, b]$), jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych przedziałów parami rozłącznych (α_1, β_1), $\ldots$, $(\alpha_N, \beta_N) \subset [a, b]$ zachodzi implikacja

$$\sum_{k=1}^{N} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \implies \sum_{k=1}^{N} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon.$$

---

1. Funkcje monotoniczne na $\mathbb{R}$ mają wszędzie granice lewo i prawostronne, a zbiór punktów nieciągłości jest co najwyżej przeliczalny.

2. $\mathrm{BV}[a, b]$ jest przestrzenią liniową, ponadto $\|f\|_{\mathrm{BV}[a,b]} = |f(a)| + V(f; a, b)$ jest normą na tej przestrzeni.

3. ♡[1] Przestrzeń $(\mathrm{BV}[a, b], \|\cdot\|_{\mathrm{BV}[a,b]})$ jest przestrzenią Banacha.

4. Jeśli $f \in \mathrm{BV}[a, b]$, to f jest ograniczona.

5. Jeśli $f, g \in \mathrm{BV}[a, b]$, to również $fg \in \mathrm{BV}[a, b]$.

6. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Wówczas $f \in \mathrm{BV}[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\operatorname{Re} f \in \mathrm{BV}[a, b]$ oraz $\operatorname{Im} f \in \mathrm{BV}[a, b]$.

7. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna. Wówczas $f \in \mathrm{BV}[a, b]$. Ile jest równe $V(f; a, b)$?

8. Jeśli $a \leq x \leq y \leq b$, to $V(f; a, y) = V(f; a, x) + V(f; x, y)$.
   W szczególności funkcja $V(f; a, \cdot)$ jest rosnąca[2] na $[a, b]$.

9. Niech $f \in \mathrm{BV}[a, b]$. Jeżeli $a \leq x \leq y \leq b$, to $|f(y) - f(x)| \leq |V(f; a, y) - V(f; a, x)|$.

10. Funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest różnicą dwóch funkcji rosnących wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \mathrm{BV}[a, b]$. *Wskazówka do* $(\Leftarrow)$. $f(x) = V(f; a, x) - (V(f; a, x) - f(x))$.

11. Niech $a, b > 0$ oraz
    $$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(x^{-b}\right) & \text{dla } x \in (0, 1], \\ 0 & \text{dla } \ x = 0, \end{cases}$$
    Wówczas (i) funkcja f jest ciągła; (ii) $f \in \mathrm{BV}[0, 1]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a > b$.

12. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ jest absolutnie ciągła, to (a) jest ciągła; (b) ma wahanie ograniczone; (c) ma *własność N Łuzina*, tzn. jeśli $N \subset [a, b]$ ma miarę zero, to również $\lambda^*(f(N)) = 0$.[3]

    Wskazówka. Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n, \beta_n) \supset N$ o mierze $< \varepsilon$.

---

[1] Zadania oznaczone ♡ są dla osób szczególnie zainteresowanych i będą zwykle pomijane na ćwiczeniach.

[2] *Rosnąca* oznacza dla nas *słabo rosnącą*.

[3] Jest też prawdziwe twierdzenie odwrotne (*Banacha–Zareckiego*): jeśli f spełnia warunki (a), (b), (c), to $f \in AC[a, b]$.