Analiza rzeczywista i zespolona Lista 2

Liczbę $\alpha \in [-\infty, \infty]$ nazywamy *liczbą pochodną* funkcji f w punkcie $x_0 \in [a, b]$, jeśli istnieje ciąg $h_k \to 0$, $h_k \neq 0$, $x_0 + h_k \in [a, b]$ taki, że

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_0 + h_k) - f(x_0)}{h_k} = \alpha.$$

Jakąkolwiek taką liczbę będziemy oznaczać przez $Df(x_0)$ (mimo że na ogół nie jest ona wyznaczona jednoznacznie).

---

13. Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in [a, b]$, to istnieje liczba pochodna f w punkcie x_0.

14. Jeśli dodatkowo funkcja f jest rosnąca, to każda jej liczba pochodna w punkcie x_0 jest nieujemna.

15. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in [a, b]$. W punkcie x_0 jest dokładnie jedna liczba pochodna $Df(x_0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy f ma w punkcie x_0 pochodną (być może niewłaściwą). W takiej sytuacji $f'(x_0) = Df(x_0)$.

16. Podaj interpretację geometryczną liczby pochodnej. Niech

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mathbf{1}_{(2^{-n}, 2^{-n+1}]}(x), \quad \text{dla } x \in [-1, 1].$$

Uzasadnij, że funkcja f jest rosnąca; jakie ma ona liczby pochodne w zerze?

17. * Załóżmy, że $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ściśle rosnąca i niech $E \subset [a, b]$. Jeśli w każdym punkcie $x \in E$ istnieje liczba pochodna $Df(x) > q \geq 0$, to $\lambda^*(f(E)) \geq q\lambda^*(E)$.

18. Można uniknąć stosowania twierdzenia o maksymalnym łańcuchu w dowodzie lematu $5B$ przy dodatkowym założeniu ograniczoności. Dokładniej, rozważmy następujące twierdzenie.

Lemat 1 (5B dla zbiorów ograniczonych). *Niech $K \subset \mathbb{R}^d$ będzie pewnym zbiorem ograniczonym, zaś $\mathcal{B}$ – pewną rodziną kul zawartych w K. Wówczas z rodziny $\mathcal{B}$ można wybrać przeliczalną podrodzinę $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ kul parami rozłącznych taką, że*

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B\in\mathcal{G}} 5B, \tag{1}$$

gdzie $5B$ jest kulą o takim samym środku co B, ale pięciokrotnie większym promieniu. Ponadto każda kula $B \in \mathcal{B}$ przecina pewną kulę $C \in \mathcal{G}$ taką, że $B \subset 5C$.

Dowód. Niech $n \in \mathbb{N}$, załóżmy, że wybraliśmy już kule parami rozłączne $B_1, \ldots, B_{n-1} \in \mathcal{B}$ (przyjmujemy konwencję, że przypadek $n = 1$ to pierwszy krok, w którym nic jeszcze nie wybraliśmy). Niech

$$\mathcal{A}_{n-1} = \{B \in \mathcal{B} : B \cap B_j = \emptyset \text{ dla } j = 1, \ldots, n-1\}.$$

Jeśli rodzina $\mathcal{A}_{n-1}$ jest pusta, to kładziemy $\mathcal{G} = \{B_1, \ldots B_{n-1}\}$ i kończymy konstrukcję. W przeciwnym razie niech

$$M_{n-1} = \sup\{\operatorname{diam}(B) : B \in \mathcal{A}_{n-1}\}.$$

Oczywiście $M_{n-1} < \infty$. Wybierzmy teraz kulę $B_n \in \mathcal{A}_{n-1}$, która jest „jedną z największych w rodzinie $\mathcal{A}_{n-1}$" — dokładniej taką, że $\operatorname{diam}(B_n) > \frac{M_{n-1}}{2}$.

Jeśli żadna z rodzin $\mathcal{A}_{n-1}$ w powyższej konstrukcji nie była pusta, to kładziemy $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \ldots\}$.

Dokończ ten dowód wykazując, że $\mathcal{G}$ spełnia wszystkie żądane warunki. □