Analiza rzeczywista i zespolona Lista 3

18. Oblicz funkcję maksymalną $M\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$ i narysuj jej wykres. Dla jakich $p \in [1,\infty]$ zachodzi $M\mathbf{1}_{[-1,1]} \in L^p(\mathbb{R})$? *Uwaga.* Nie trzeba bardzo dokładnie uzasadniać, dla jakiego promienia r supremum w definicji funkcji maksymalnej jest osiągane – to można zauważyć z rysunku.

19. Niech $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Mówimy, że f jest *dolnie półciągła w punkcie* x_0, jeśli $f(x_0) \leq \liminf_{x\to x_0} f(x)$. Tak jak zwykle mówimy, że f jest *dolnie półciągła*, jeśli f jest dolnie półciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^d$.
Uzasadnij, że f jest dolnie półciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy $f^{-1}((a,\infty])$ są otwarte dla każdego $a \in \mathbb{R}$.

20. Dla dowolnej funkcji $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, funkcja maksymalna Mf jest dolnie półciągła, a więc mierzalna.

Niech $X = (X,\rho)$ będzie zupełną przestrzenią metryczną. Określamy *odległość punktu* $x \in X$ *od zbioru* $A \subset X$ jako $\operatorname{dist}(x,A) = \inf\{\rho(x,y) : y \in A\}$. Piszemy $K \subset\subset X$, jeśli K jest zwartym podzbiorem X. *Nośnikiem* funkcji ciągłej $f : X \to \mathbb{R}$ nazywamy zbiór

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Przestrzeń wszystkich (rzeczywistych) funkcji ciągłych na X o nośniku zwartym oznaczamy przez $C_c(X)$.

21. Niech $K \subset\subset \mathbb{R}^d$. Wówczas funkcje

$$f_n(x) = (1 - n\operatorname{dist}(x,K))_+$$

są ciągłe, mają nośnik zwarty oraz $f_n \to \mathbf{1}_K$ punktowo, ale też w normie $L^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in [1,\infty)$.

22. Przestrzeń $C_c(\mathbb{R}^d)$ jest gęstym podzbiorem $L^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in [1,\infty)$, ale *nie* dla $p = \infty$.

23. Dla funkcji $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ określmy jej przesunięcie o $h \in \mathbb{R}^d$ wzorem

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Uzasadnij, że dla $1 \leq p < \infty$ zachodzi

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

jeśli (a) $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$; (b) $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.
Wskazówka. Przypadek ogólny (b) można wywnioskować z (a) i z zadania 22.

24. Niech $E \subset \mathbb{R}^d$ będzie mierzalny. Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}^d$ jest *punktem gęstości* zbioru E, jeśli

$$\lim_{r\to 0} \frac{\lambda(B(x,r) \cap E)}{\lambda(B(x,r))} = 1.$$

Znajdź wszystkie punkty gęstości zbiorów $[0,1]$ oraz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

25. Niech $E \subset \mathbb{R}^d$ będzie mierzalny i niech F będzie zbiorem jego punktów gęstości. Wówczas $\lambda(E \triangle F) = 0$, czyli innymi słowy, prawie każdy punkt $x \in E$ jest punktem gęstości zbioru E, oraz prawie każdy punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus E$ *nie* jest punktem gęstości zbioru E.
Wskazówka. Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu zastosowane do odpowiedniej funkcji.