Analiza rzeczywista i zespolona Lista 4

26. Przedstaw funkcję $f(x) = \max(0, 1 - |x|)$, $x \in [-2, 2]$, jako różnicę dwóch funkcji rosnących; rozwiązanie może być na rysunku.

27. Istnieje ciągła monotoniczna funkcja f na $\mathbb{R}$, która nie jest stała, ale $f' = 0$ *p.w.* [*Rudin*, przykład 8.20(b)]

28. ~~Zachodzi inkluzja $\mathrm{AC}[a,b] \subset BV[a,b]$.~~ [To już było w zadaniu 12.]

29. Jeśli $f, g \in \mathrm{AC}[a,b]$, to $fg \in \mathrm{AC}[a,b]$ oraz $\int_a^b f'g\,dx = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b fg'\,dx$.

30. Jeśli $f \in \mathrm{AC}[a,b]$ jest funkcją rzeczywistą, to $V(f; a, x) = \int_a^x |f'(t)|\,dt$. *Przypomnienie.* Funkcja V była zdefiniowana na pierwszej liście.

31. Jeśli $f \in \mathrm{AC}[a,b]$, to $V(f; a, \cdot) \in \mathrm{AC}[a,b]$. Zatem f jest różnicą dwóch absolutnie ciągłych funkcji rosnących.

32. Przestrzeń $\mathrm{AC}[a,b]$ z normą
$$\|f\| = \int_a^b (|f(x)| + |f'(x)|)\,dx$$
jest przestrzenią Banacha.

33. Niech $f \in \mathrm{AC}[a,b]$ i $g(x) = |f(x)|^p$ dla $p > 1$. Sprawdź, że pochodna $g'(x)$ istnieje w prawie każdym punkcie $x \in [a,b]$ i oblicz ją. Czy można tu korzystać z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej?

34. Jeśli $f_n, f \in L^p(X, \mu)$, gdzie $1 \le p < \infty$, oraz $f_n \to f$ w normie $L^p(X, \mu)$, to $f_n \to f$ wg miary μ. Czy ta implikacja jest prawdziwa dla $p = \infty$?

35. Jeśli $f_n \to f$ wg miary μ, to istnieje podciąg $(f_{k_n})_n$ zbieżny do funkcji f prawie wszędzie względem miary μ. *Uwaga.* To jest standardowy fakt z teorii miary, dowód można znaleźć np. w książce Bruckner–Bruckner–Thomson, Theorem 4.14.

36. Z poprzednich dwóch zadań wynika, że jeśli $1 \le p < \infty$ oraz $f_n \to f$ w normie $L^p(X, \mu)$, to istnieje podciąg $(f_{k_n})_n$ zbieżny do funkcji f prawie wszędzie względem miary μ. Czy ta implikacja jest prawdziwa w przypadku $p = \infty$?

Niech $\mathcal{M}$ będzie σ-ciałem podzbiorów zbioru X.

Funkcję $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ nazywamy *miarą*, lub *miarą dodatnią*, jeśli jest σ-addytywna oraz $\mu(\emptyset) = 0$. Funkcję $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ nazywamy *miarą zespoloną*, jeśli jest σ-addytywna.

Zwróćmy uwagę, że nie każda miara dodatnia jest miarą zespoloną, bo $[0, \infty]$ nie jest podzbiorem $\mathbb{C}$.

Dla miary zespolonej μ określamy jej *wariację* (*miarę wariacji*) $|\mu|$ wzorem
$$|\mu|(E) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|, \qquad E \in \mathcal{M},$$
gdzie supremum jest wzięte po wszystkich *rozkładach* $\{E_i\}$ zbioru E, tj. po przeliczalnych rodzinach $\{E_i\}$ zbiorów z $\mathcal{M}$, które są parami rozłączne oraz spełniają $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E$. Można udowodnić, że $|\mu|$ jest miarą skończoną.

---

37. Podaj $|\nu|$, jeżeli $\nu(E) = \int_E f\,d\mu$, dla miary $\mu \ge 0$ i rzeczywistej funkcji $f \in L^1(\mu)$.