Analiza rzeczywista i zespolona **Lista 5**

Przypomnijmy, że używamy przeskalowanej miary Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$, $m = (2\pi)^{-1/2}\lambda$. Przyjmujemy

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, m(dx)\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty),$$

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, m(dy) \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{(splot funkcji } f \text{ i } g),$$

$$\hat{f}(t) = \mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}\, m(dx) \qquad (t \in \mathbb{R}), \qquad \text{(transformata Fouriera funkcji } f),$$

$$\tau_h f(x) = f(x-h) \qquad (x \in \mathbb{R}), \qquad \text{(przesunięcie funkcji } f),$$

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \qquad (\lambda > 0, x \in \mathbb{R}), \qquad \text{(dylatacja funkcji } f).$$

---

38. Niech $1 \le p \le \infty$. Jeśli $f \in L^1(\mathbb{R})$ oraz $g \in L^p(\mathbb{R})$, to splot $f * g$ jest prawie wszędzie dobrze określony oraz $f * g \in L^p(\mathbb{R})$.

39. Transformacja Fouriera jest ograniczonym operatorem liniowym z $L^1(\mathbb{R})$ w $L^\infty(\mathbb{R})$, ponadto
$$\|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_1 \qquad (f \in L^1(\mathbb{R})).$$

40. Niech $f \in L^1(\mathbb{R})$, $h \in \mathbb{R}$ oraz $g(x) = f(x)e^{ihx}$. Wówczas
$$(\tau_h f)\hat{}(t) = \hat{f}(t)e^{-iht} \quad \text{oraz} \quad \hat{g}(t) = \tau_h(\hat{f})(t) = \hat{f}(t-h) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

41. Jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, to $(f * g)\hat{}(t) = \hat{f}(t)\hat{g}(t)$.

42. Oblicz transformatę Fouriera indykatora odcinka $[a, b]$, gdzie $-\infty < a < b < \infty$.

43. Oblicz splot $\mathbf{1}_{[0,1]} * \mathbf{1}_{[0,1]}$.

44. Niech $f(x) = e^{-\varepsilon|x|}$. Wówczas
$$\hat{f}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + t^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

45. Niech $f(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cdot \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$. Wówczas $\hat{f}(t) = e^{-\varepsilon|t|}$.
Wskazówka. Twierdzenie o residuach i lemat Jordana.

46. Jeśli p i q są wykładnikami sprzężonymi, $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$ i $h = f * g$, to h jest funkcją jednostajnie ciągłą.

47. Niech $f(x) = 0$ dla $x \le 0$ oraz $f(x) = \exp(-1/x)$ dla $x > 0$. Wówczas $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Wskazówka. $f^{(n)}(x) = f(x)P_n(1/x)$ dla $x > 0$ i pewnego wielomianu P_n.

48. Niech $h(x) = f(1 - x^2)$, gdzie f jest jw. Wówczas $h \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap C_c(\mathbb{R}) =: C_c^\infty(\mathbb{R})$.

49. Jeśli $g \in C_c^1(\mathbb{R})$ oraz $h \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$, to splot $g * h$ jest klasy C^1 oraz $(g * h)' = g' * h$.

50. Jeśli $[a, b] \subset (c, d)$, to istnieje funkcja $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ taka, że $\mathbf{1}_{[a,b]} \le f \le \mathbf{1}_{[c,d]}$.
Wskazówka. Można wziąć $f = ch_\delta * \mathbf{1}_I$ dla funkcji h jak w zadaniu 48 oraz odpowiednio dobranych $c > 0$, $\delta > 0$ i odcinka I.