Analiza rzeczywista i zespolona Lista 6

51. Jeśli $1 \leq p < \infty$ oraz $f \in L^p(\mathbb{R})$, to funkcje $f\mathbf{1}_{[-R,R]}$ zbiegają w normie $L^p(\mathbb{R})$ do funkcji f, gdy $R \to \infty$.

52. Niech $f_n \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R})$, gdzie $1 \leq p, q \leq \infty$. Załóżmy, że ciąg (f_n) zbiega w $L^p(\mathbb{R})$ do pewnej funkcji $g \in L^p(\mathbb{R})$, a także zbiega w $L^q(\mathbb{R})$ do pewnej funkcji $h \in L^q(\mathbb{R})$. Uzasadnij, że wówczas $g = h$ (prawie wszędzie).

53. (ciągłość normy) Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Jeśli $\|x_n - x\| \to 0$ przy $n \to \infty$, to również $\|x_n\| \to \|x\|$ przy $n \to \infty$.

54. (wzór polaryzacyjny) Niech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie *rzeczywistą* przestrzenią unitarną. Definiujemy normę jak zwykle, kładąc $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Udowodnij następujący wzór

$$\langle f, g\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2\right).$$

Jak należy zmodyfikować lewą stronę powyższego wzoru w przypadku przestrzeni *zespolonej*? Użyj tej modyfikacji do udowodnienia, że w zespolonej przestrzeni unitarnej

$$\langle f, g\rangle = \tfrac{1}{4}\left(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\|f+ig\|^2 - i\|f-ig\|^2\right)$$

Przypomnijmy, że dla funkcji $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$, czyli $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, określamy jej *transformatę Fouriera* wzorem

$$\mathcal{F}(f)(t) = \hat{f}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{2\pi i k t}{N}}, \quad (t \in \mathbb{Z}_N).$$

Splot funkcji $f, g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ definiujemy jako następującą funkcję $f * g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$

$$(f * g)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} x(n-k) y(k), \quad (n \in \mathbb{Z}_N).$$

55. Dla $f, g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ zachodzi

$$\mathcal{F}(f * g)(t) = \mathcal{F}(f)(t) \cdot \mathcal{F}(g)(t).$$

56. Oblicz splot $(1, 2, 0, 3) * (3, 0, 0 - 1)$ korzystając (a) bezpośrednio z definicji, (b) z poprzedniego zadania i twierdzenia o transformacji odwrotnej.

57. Dla $f, g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ zachodzi następująca *tożsamość Parsevala*: $\langle f, g\rangle = \frac{1}{N}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$.

58. Oblicz transformatę Fouriera $(1, 0, -3, 2)$ (a) bezpośrednio z definicji (b) używając algorytmu FFT.

---

59. Określmy funkcję sinc wzorem $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$. Uzasadnij, że $\operatorname{sinc} \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$ oraz

$$\mathcal{F}(\operatorname{sinc}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathbf{1}_{[-1,1]}.$$

Ile wynosi $\mathcal{F}(\operatorname{sinc}^2)$?