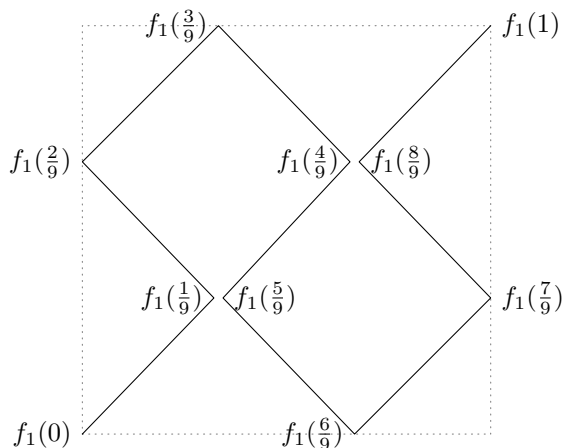


60. Niech  $X = \mathbb{R}^2$ , oraz niech  $\mathcal{T}$  będzie rodziną prostokątów

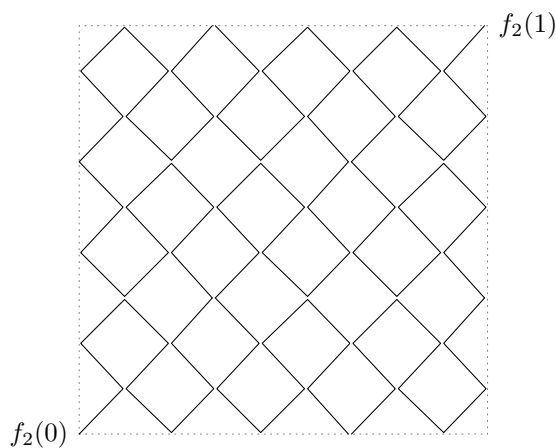
$$T = (a, b] \times (c, d]$$

i niech  $\tau(T)$  będzie polem  $T$ . Niech  $\mu^*$  będzie miarą zewnętrzną otrzymaną z  $\mathcal{T}$  i  $\tau$  za pomocą Metody I. Udowodnij, że  $\mu^*$  jest metryczną miarą zewnętrzną (dwuwymiarową miarą Lebesgue'a).

61. Niech  $\mathcal{T}$  będzie rodziną zbiorów zawierającą  $\emptyset$  i przedziały otwarte w  $X = (-1, 1)$  i niech  $\tau((a, b)) = |b^2 - a^2|$ . Stosujemy Metodę I otrzymując  $\mu^*$  i Metodę II otrzymując  $\mu_0^*$ . Opisz rodzinę zbiorów  $\mu^*$ -mierzalnych. Wyznacz  $\mu^*((0, 1))$  oraz  $\mu_0^*((0, 1))$ .
62. Niech  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{T}$  zawiera  $\emptyset$  i przedziały otwarte. Niech  $\tau(\emptyset) = 0$  i  $\tau((a, b)) = (b - a)^{-1}$  dla wszystkich innych  $(a, b) \in \mathcal{T}$ . Niech  $\mu_1, \mu_2$  będą miarami otrzymanymi z  $\mathcal{T}$  i  $\tau$  Metodą I i II, odpowiednio. Uzasadnij, że  $\mu_1(E) = 0$  dla wszystkich  $E \subset X$ , oraz  $\mu_2(E) = \infty$  dla każdego zbioru niepustego  $E \subset X$ .
63. Konstruujemy funkcje ciągłe  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ :  $f_0(x) = (x, x)$ ,  $f_1$  – jak na rysunku, tj.  $f_1(x) = (3x, 3x)$  dla  $x \in [0, \frac{1}{9}]$ ,  $f_1(x) = (\frac{2}{3} - 3x, 3x)$  dla  $x \in [\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ , itd. Parametryzacja jest zawsze taka, żeby norma pochodnej  $\|f'_n(x)\|$  była stała dla  $x \in (0, 1) \setminus (9^{-n}\mathbb{Z})$ .



Dla czytelności punkty  $f_1(\frac{1}{9})$  i  $f_1(\frac{5}{9})$  zostały rozsunięte, mimo że  $f_1(\frac{1}{9}) = f_1(\frac{5}{9})$ . Podobnie  $f_1(\frac{4}{9}) = f_1(\frac{8}{9})$ .



Tu również niektóre punkty zostały rozsunięte.

Przekonaj się, że

- (a) Jeśli  $m \geq n$ , to funkcja  $f_m$  na odcinku postaci  $[k9^{-n}, (k+1)9^{-n}]$  (gdzie  $k \in \{0, 1, \dots, 9^n - 1\}$ ) przyjmuje wartości w pewnym kwadracie (takim samym dla każdego  $m$ ) o boku długości  $3^{-n}$ . Zatem  $\|f_m - f_n\|_\infty \leq \sqrt{2} \cdot 3^{-n}$ .
- (b) Funkcja  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  jest dobrze określona i ciągła.
- (c) Obraz  $f([0, 1])$  jest gęsty w  $[0, 1]^2$ , a więc  $f([0, 1]) = [0, 1]^2$ .

Określona powyżej funkcja  $f$  nie jest różnowartościowa. Czy istnieje różnowartościowa funkcja ciągła  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  taka, że  $f([0, 1]) = [0, 1]^2$ ?