Analiza rzeczywista i zespolona — Lista 8

64. Udowodnij następujące własności wymiaru Hausdorffa:
    (a) jeśli $E \subset F$, to $\dim_H E \leq \dim_H F$;
    (b) $\dim_H(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sup_{n \in N} \dim_H E_n$;
    (c) jeśli E jest przeliczalny, to $\dim_H E = 0$;
    (d) jeśli $G \subset \mathbb{R}^d$ jest otwarty i niepusty, to $\dim_H G = d$.

65. Wyznacz wymiar Hausdorffa sfery jednostkowej w $\mathbb{R}^3$.

66. Wyznacz wymiar Hausdorffa zbioru Cantora.

67. Niech F będzie zbiorem liczb z przedziału $[0, 1]$, których rozwinięcie dziesiętne nie zawiera cyfry 5. Wyznacz $\dim_H(F)$.

68. Wyznacz wymiar Hausdorffa krzywej $\{(x, \sin \frac{1}{x}) : 0 < x < 1\}$.

69. Skonstruuj zbiór o wymiarze Hausdorffa równym $\frac{1}{2}$.

70. Czy z faktu, że $\dim_H(E) = 0$ wynika, że E jest przeliczalny?

71. Udowodnij, że jeżeli $f : [0, 1] \to X$ jest krzywą ciągłą w X oraz $0 \leq a < b \leq 1$, to $\mu^{(1)}(f[a, b]) \geq \rho(f(a), f(b))$.

72. (Krzywa Kocha). Rozważamy następujące cztery podobieństwa $\mathbb{C}$ o skali $\frac{1}{3}$:

$$S_1(z) = \tfrac{1}{3}z, \quad S_2(z) = \tfrac{1}{3}e^{\frac{\pi}{3}i}z + \tfrac{1}{3}, \quad S_3(z) = \tfrac{1}{3}e^{-\frac{\pi}{3}i}z + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{6}, \quad S_4(z) = \tfrac{1}{3}z + \tfrac{2}{3},$$

oraz ciąg krzywych $f_n : [0, 1] \to \mathbb{C}$ określony rekurencyjnie: $f_0(t) = t$ dla $t \in [0, 1]$ oraz

$$f_{n+1}(t) = \begin{cases} S_1 \circ f_n(4t), & t \in [0, \frac{1}{4}], \\ S_2 \circ f_n(4t - 1), & t \in [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}], \\ S_3 \circ f_n(4t - 2), & t \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}], \\ S_4 \circ f_n(4t - 3), & t \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

   (a) Narysuj kilka początkowych obrazów $f_n([0, 1])$.

   Sprawdź prawdziwość następujących stwierdzeń (*wskazówka*: wiele z nich można łatwo udowodnić indukcyjnie).

   (b) $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$.
   (c) Definicja f_{n+1} jest poprawna (tzn. jednoznaczna w punktach 1/4, 2/4 i 3/4) oraz funkcje f_n są ciągłe.
   (d) Jeśli $f_n(t) = f_{n+1}(t)$ dla pewnych t i n, to $f_m(t) = f_n(t)$ dla wszystkich $m \geq n$.
   (e) $f_m(\frac{k}{4^n}) = f_n(\frac{k}{4^n})$ dla $m \geq n$ oraz $k = 0, 1, \ldots, 4^n$.
   (f) $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{1}{3^n}$ lub $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \leq \frac{c}{3^n}$ (do wyboru).
   (g) Istnieje $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ oraz f jest ciągła na $[0, 1]$.
   (h) Funkcja f jest różnowartościowa.
   (i) Funkcja f jest homeomorfizmem pomiędzy $[0, 1]$ a $f([0, 1])$.

   Uwaga: f powyżej nazywamy *krzywą Kocha*. Jak później zobaczymy, $\dim_H(f([0, 1]) = \log_3 4$, tak więc z części (i) wynika, że wymiar Hausdorffa nie jest własnością topologiczną (tzn. nie jest zachowywany przez homeomorfizmy).