Analiza rzeczywista i zespolona **Lista 9**

Mówimy, że IFS $\{S_1, \dots, S_m\}$ spełnia *warunek otwartego zbioru*, jeśli istnieje niepusty, ograniczony zbiór otwarty $V \subset D$ taki, że

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i(V) \subset V$$

oraz zbiory $S_i(V)$ są parami rozłączne.

Na wykładzie (częściowo) udowodnimy następujące twierdzenie.

TWIERDZENIE **1.** *Niech układ podobieństw S_i o skali $c_i \in (0,1)$ na $\mathbb{R}^d$ $(i = 1, \dots, m)$ spełnia warunek otwartego zbioru. Jeżeli F jest atraktorem IFS $\{S_1, \dots, S_m\}$, tzn. $F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F)$, to $\dim_H F = s$, gdzie s jest rozwiązaniem równania*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^s = 1.$$

---

73. (Krzywa Kocha, ciąg dalszy). Rozważamy układ podobieństw $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ oraz funkcję f takie, jak w zadaniu dotyczącym krzywej Kocha z poprzedniej listy.

    Uzasadnij, że układ $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ spełnia warunek zbioru otwartego. Sprawdź, że obraz $f([0,1])$ jest atraktorem tego IFS. Jaki jest jego wymiar Hausdorffa?

74. Niech $\{S_1, \dots, S_m\}$ będzie IFS na $D \subset \mathbb{R}^d$ takim, że

    $$|S_i(x) - S_i(y)| \leq c_i |x - y|, \quad (x, y \in D),$$

    gdzie $c_i \in (0,1)$ $(i = 1, \dots, m)$. Niech odwzorowanie $S : 2^{\mathcal{S}} \to 2^{\mathcal{S}}$ będzie określone wzorem

    $$S(E) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(E), \qquad (E \in \mathcal{S}).$$

    Niech $E \subset D$ będzie niepustym zbiorem zwartym takim, że $S(E) \subset E$. Udowodnij, że wówczas zbiór $F := \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E)$ jest atraktorem IFS $\{S_1, \dots, S_m\}$.

75. Niech $\{V_i\}$ będą otwartymi, rozłącznymi podzbiorami $\mathbb{R}^d$ o takiej własności, że każdy zbiór V_i zawiera pewną kulę o promieniu $a_1 r$ oraz jest zawarty w pewnej kuli o promieniu $a_2 r$. Wówczas każda kula $B \subset \mathbb{R}^d$ o promieniu r przecina co najwyżej $(1 + 2a_2)^d a_1^{-d}$ zbiorów $\overline{V_i}$.

76. Wiemy, że zbiór Cantora C jest atraktorem IFS $\{S_1, S_2\}$, gdzie

    $$S_1(x) = \frac{1}{3}x, \qquad S_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

    Sprawdź, że układ $\{S_1, S_2 S_1, S_2 S_2\}$ spełnia warunek zbioru otwartego oraz że C jest jego atraktorem. Oblicz wymiar Hausdorffa zbioru C na dwa sposoby (korzystając z twierdzenia 1 dla IFS $\{S_1, S_2\}$ oraz dla IFS $\{S_1, S_2 S_1, S_2 S_2\}$).