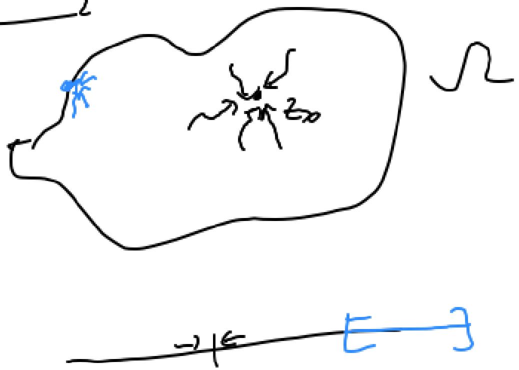
$\Omega \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$; f ma pochodną w z_0, jeśli



$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

~~jeśli~~ granica po prawej istnieje i ~~jest~~ $\in \mathbb{C}$.

Def. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym i $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ma pochodną (zespoloną) w każdym punkcie z Ω, to f nazywamy funkcją <u>holomorficzną</u> na Ω. Zbiór wszystkich funkcji holomorficznych na Ω oznaczamy przez $H(\Omega)$.

<u>Uwaga</u> (przeformułowanie definicji pochodnej) $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \operatorname{Int} \Omega$

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ ma pochodną} \\ \text{w punkcie } z_0 \in \Omega \end{array}\right) \iff \left(\exists_{A \in \mathbb{C}} \exists_{D(z_0,r) \subset \Omega} \exists_{\varepsilon: D(z_0,r) \to \mathbb{C}} \text{ t. że } f(z) - f(z_0) = (A + \varepsilon(z))(z - z_0) \text{ dla } z \in D(z_0,r) \text{ oraz } \lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0 \right).$$

$(\Leftarrow)$ $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A + \varepsilon(z)$

$(\Rightarrow)$ $A := f'(z_0)$

Wniosek. Jeśli f ma pochodną w z_0, to f jest ciągła w z_0.

Tw. Jeśli $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ mają pochodne w punkcie $z_0 \in \Omega$, to również funkcje $f+g$, $f \cdot g$, $\alpha \cdot f$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ mają pochodne w z_0 oraz

$$(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$

$$(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0)\, g'(z_0).$$

$$(\alpha \cdot f)'(z_0) = \alpha \cdot f'(z_0).$$

Dowód. Jak dla funkcji rzeczywistych. (pomijamy).

Tw. Jeśli f ma pochodną w z_0, a g ma pochodną w $w_0 = f(z_0)$, to złożenie $g \circ f$ ma pochodną w z_0 oraz $(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$

Dd. Z założenia

$$f(z) - f(z_0) = \left(f'(z_0) + \varepsilon(z)\right)(z - z_0), \quad \left(z \in D(z_0, r)\right)$$

$$g(w) - g(w_0) = \left(g'(w_0) + \eta(w)\right)(w - w_0), \quad \left(w \in D(w_0, \varrho)\right).$$

gdzie $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$, $\lim_{w \to w_0} \eta(w) = 0$. Kładąc $h = g \circ f$, $w = f(z)$ otrzymujemy

$$\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{z - z_0} = \frac{\left(g'(w_0) + \eta(w)\right)\cdot(w - w_0)}{z - z_0} = \underbrace{\left(g'(w_0) + \underbrace{\eta(w)}_{\to 0}\right)}_{\to g'(w_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\to f'(z_0)}.$$

gdy $z \to z_0$, to $w = f(z) \to f(z_0) = w_0$ ⊠

Wniosek Jeśli $f \in H(\Omega)$ i $f(z) \neq 0$ dla $z \in \Omega$, to $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$ oraz

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = \frac{-f'(z_0)}{f(z_0)^2}.$$

$f \in H(\Omega)$,

$f \neq 0$ na zbiorze $\underbrace{\Omega \setminus F}_{\text{otwarty}}$

$\frac{1}{f} \in H(\Omega \setminus F)$

$F = \{z \in \Omega : f(z) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ jest domknięty w Ω

Tw. Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ jest zbieżny w dysku $D(p,r)$, to jego suma $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w dysku $D(p,r)$ oraz

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-p)^{n-1}, \quad (z \in D(p,r)).$$

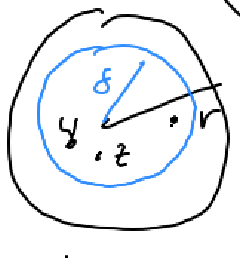
Dd. Zauważmy, że szereg $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-p)^{n-1}}$ ma taki sam promień zbieżności, co szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$.

$$\left\{ R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|}} \right. \qquad \sum b_n (z-p)^n$$

$$\sqrt[n]{n} \to 1$$

Można założyć, że $p=0$. Niech $0<\delta<r$.

~~Niech~~ Dla $w, z \in D(0,\delta)$ zachodzi



$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \frac{\sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=\cancel{0}\,1}^{\infty} a_n w^n}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z-w} - n w^{n-1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\left(z^{n-1} + z^{n-2} w + \ldots + w^{n-1} - n w^{n-1} \right)}_{\overset{!!}{=}\, f_n(z)}$$

(ma sens dla $z \in D(0,\delta)$, też $z = w$)

$\{$ w - ustalone

$$f_n(z) = a_n\left(z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + w^{n-1} - nw^{n-1}\right).$$

Mamy dla $z, w \in D(0,\delta)$

$$|f_n(z)| = |a_n| \cdot \left|z^{n-1} + z^{n-2}w + \ldots + w^{n-1} - nw^{n-1}\right| \le |a_n| \cdot \left(\underbrace{|z|^{n-1} + |z|^{n-2}\cdot|w| + \ldots + |w|^{n-1}}_{n \text{ składników}} + n|w|^{n-1}\right)$$

$$\le 2n|a_n| \cdot \delta^{n-1}.$$

Ponieważ szereg potęgowy $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right)$ jest zbieżny bezwzględnie wewnątrz obszaru zbieżności, więc

$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\delta^{n-1} < \infty$. Zatem z kryterium Weierstrassa szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest zbieżny jednostajnie na $D(0,\delta)$. Ponieważ funkcje $f_n(z)$ są ciągłe, więc też suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ jest funkcją ciągłą na $D(0,\delta)$, skąd

$$(*) \qquad \lim_{z\to w}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(w) = 0, \text{ bo } f_n(w) = 0.$$

$\boxtimes$

(*) można też uzasadnić używając tw. Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej:

$$\lim_{z\to w} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)}_{\int_{\mathbb{N}} f_n(z)\mu(dn)} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z\to w} f_n(z)$$

majoranta: $|f_n(z)| \leq 2n|a_n|\delta^{n-1}$, $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 2n|a_n|\delta^{n-1}}_{=\int_{\mathbb{N}} 2n|a_n|\delta^{n-1}\mu(dn)} < \infty$,

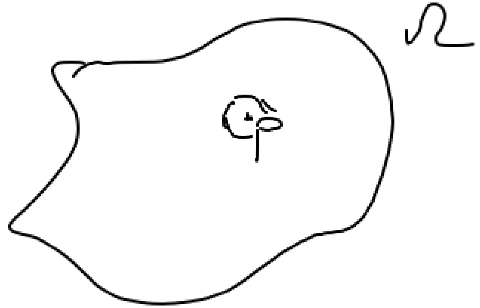
μ – miara licząca na $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$

$z\to w$, $z\in\mathbb{C}$, to nie jest przeszkodą w stosowaniu tw. Lebesgue'a, bo można z definicji Heinego granicy przejść na ciągi

Ω – otwarty, $\Omega \subset \mathbb{C}$

<u>Wniosek</u>

- Jeśli dla każdego $p \in \Omega$ istnieją $r>0$ oraz szereg potęgowy zbieżny do f w $D(p,r)$, to $f \in H(\Omega)$



- Jeśli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ w dysku $D(p,r)$, to f ma wszystkie pochodne w $D(p,r)$ oraz

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n (z-p)^{n-k} \qquad (z \in D(p,r)).$$

W szczególności $f^{(k)}(p) = k!\, a_k$.

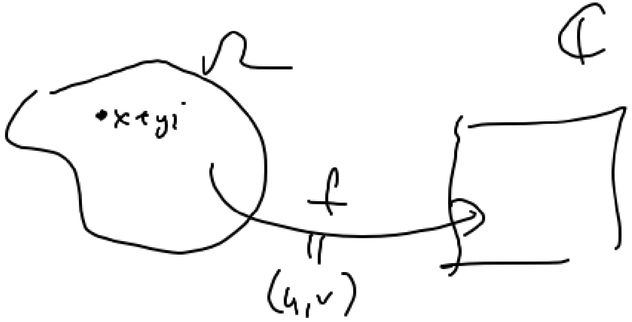
- Jeśli $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ oraz $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-p)^n$ w dysku $D(p,r)$, to $a_n = b_n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$.

Równania Cauchy-Riemanna

Niech $f:\Omega\to\mathbb{C}$, $\Omega\subset\mathbb{C}$. Dla $x,y\in\mathbb{R}$ takich, że $x+yi\in\Omega$

określamy

$$u(x,y)=\operatorname{Re} f(x+yi),$$
$$v(x,y)=\operatorname{Im} f(x+yi),$$



czyli $f(z)=\underbrace{u(\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z)}_{\operatorname{Re}f(z)}+i\,\underbrace{v(\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z)}_{\operatorname{Im}f(z)}$.

~~$(x,y\in\mathbb{R}$~~,

Jeżeli u,v mają pochodne cząstkowe w (x,y), to określamy

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x+iy)=\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+i\,\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z}:=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Np. $f(z) = z^2$. Dla $z = x + yi$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$:

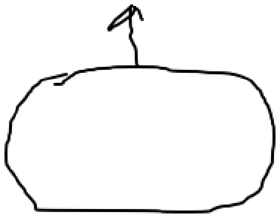
$$f(x+yi) = (x+yi)^2 = \underbrace{(x^2-y^2)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + i \cdot 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = -2y + i \cdot 2x$$

czyli

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\Big(2x + 2iy - i\left(-2y + i2x\right)\Big) = \frac{1}{2}\left(4x + 4yi\right) = 2(x+yi) = 2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\Big(2x + 2iy + i\left(-2y + i2x\right)\Big) = 0.$$



Tw. Jeśli $f'(z)$ istnieje, $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$, to istnieją $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z)$

oraz $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Dd. Dla $h \in \mathbb{R}$ mamy (z zał. że $f'(z)$ istnieje)

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h,y) + iv(x+h,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} + i \frac{v(x+h,y) - v(x,y)}{h} \right).$$

Stąd istnieją $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ (w punkcie (x,y)) oraz $f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$

Podobnie, $(h \in \mathbb{R})$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+hi) - f(z)}{hi} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h) + iv(x,y+h) - u(x,y) - iv(x,y)}{ih} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{v(x,y+h) - v(x,y)}{h} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{i}}}_{-i} \frac{u(x,y+h) - u(x,y)}{h} \right)$$

Wnioskujemy, że istnieją $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ oraz $f'(z) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)(x,y)$.

$$\| $$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)(x,y)$$

Stąd $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$, więc

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}}_{\frac{\partial f}{\partial x}} - i\Big(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}}_{\frac{\partial f}{\partial y}}\Big)\Bigg) = \frac{1}{2}\left(f'(z) + f'(z)\right) = f'(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(f'(z) - f'(z)\right) = 0.$$

$\boxtimes$

Uwaga: równania

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \qquad \text{lub} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

nazywa się równaniami Cauchy-Riemanna (w wersji rzeczywistej lub zespolonej)