Wykład 3

① Przypomnienie. Dla $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$

definiuje się pochodne formalne

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$ o ile u i v mają ciągłe poch. cząstkowe

Wzory Cauchy-Riemanna:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (C-R)$$

---

②. Uwaga. Funkcja $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w punkcie $a \in \Omega$, gdy istnieje operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liniowy taki, że

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(a+h) - F(a) - Th}{\|h\|} = 0$$

W takim wypadku T (jako macierz $n \times n$) ma współrzędne będące odp. pochodnymi cząstkowymi funkcji F.

③ TWIERDZENIE

Funkcja $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ ma zespoloną pochodną w punkcie $z_0 \in \Omega$ wtedy i tylko wtedy, gdy f – jako funkcja rzeczywista dwóch zmiennych

$$z = x+iy \simeq (x,y) \xmapsto{f} \big(u(x,y), v(x,y)\big) =$$
$$= u(x,y) + i v(x,y) = f(z)$$

jest różniczkowalna w punkcie $(\operatorname{Re} z_0, \operatorname{Im} z_0)$, i spełnione są równania (C-R).

Przykład. $f(z) = \frac{1}{z}$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Wtedy $f(z) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} =$

$$= \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=u(x,y)} + i \cdot \underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=v(x,y)}$$

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$ Wtedy

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{bmatrix}$$

(4) Całki z funkcji zespolonych.

<u>Def</u>. Funkcję $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ nazywamy całkowalną, gdy obie funkcje $\mathrm{Re}f$ i $\mathrm{Im}f$ są całkowalne (w sensie Lebesgue'a). Wtedy

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}f(x)\,dx + i\cdot\int_a^b \mathrm{Im}f(x)\,dx$$

<u>Fakt</u>. Własności powyższej całki

a) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

b) $\int_a^b (\lambda\cdot f(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \lambda\in\mathbb{C}$

c) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

<u>TWIERDZENIE</u>. Jeżeli funkcja $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ jest ciągła oraz funkcja $\psi:[a,b]\to\mathbb{C}$ jest mierzalna i ograniczona, to funkcja

$$f(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z}\,dt \quad , \quad z\in\Omega=\mathbb{C}\setminus\varphi([a,b])$$

jest rozwijalna(*) w szereg potęgowy na Ω. Zatem $f\in H(\Omega)$ oraz

$$z_0\in\Omega \qquad f^{(n)}(z_0) = n!\int_a^b \frac{\psi(t)}{(\varphi(t)-z_0)^{n+1}}\,dt$$

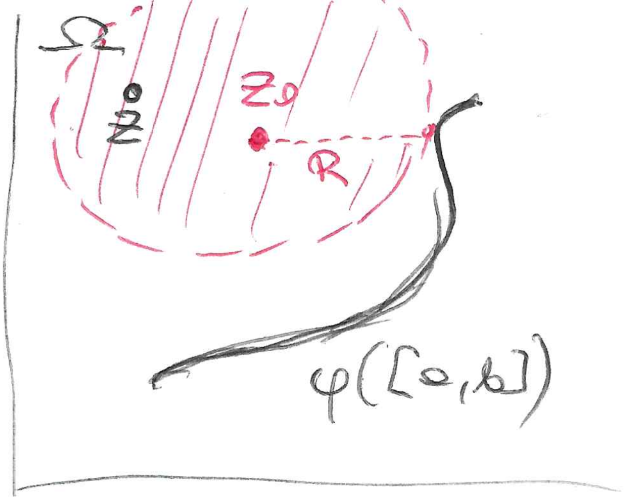
(*) „Rozwijalność w szereg" oznacza tu, że dla każdego dysku $D(z_0,R)\subset\Omega$ funkcję f można zapisać jako szereg potęgowy o środku z_0 i prom. zbieżności $\geq R$

Dowód. Niech $z_0 \in \Omega$

oraz $R = \underbrace{\operatorname{dist}(z_0, \varphi([a,b]))}_{>0}$

(bo $\varphi([a,b])$ jest domknięty).

Wtedy dla $z \in D(z_0, R)$



$$f(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)-z} = \int_a^b \frac{\psi(t)\,dt}{(\varphi(t)-z_0)-(z-z_0)} =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\varphi(t)-z_0}} \cdot \frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)-z_0} =$$

$$\frac{|z-z_0|}{|\varphi(t)-z_0|} < \frac{R}{R} = 1$$

$$= \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\varphi(t)-z_0}\right)^n \cdot \frac{\psi(t)\,dt}{\varphi(t)-z_0}.$$

Z tw. Weierstrassa, dany szereg potęgowy jest zbieżny bezwzględnie i jednostajnie – dla każdego $t \in [a,b]$. Można zamienić kolejność całki i szeregu. Stąd

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot \underbrace{\int_a^b \frac{\psi(t)\,dt}{(\varphi(t)-z_0)^{n+1}}}_{c_n}$$

i $f \in H(\Omega)$.

Mamy też $f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \cdot c_n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1}$

$$f'(z_0) = 1 \cdot c_1 = \int_a^b \frac{\psi(t)\,dt}{(\varphi(t)-z_0)^2}.$$

Kolejne pochodne – przez oczywistą indukcję.

⑤ Całkowanie wzdłuż drogi

<u>Def</u>. Drogą będziemy nazywać dowolną funkcję $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, która jest przedziałami klasy C^1, tzn. istnieją $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = \beta$ i w każdym przedziale $[s_{k-1}, s_k]$ funkcje $\underbrace{}_{\mathrm{Re}\,\gamma,\ \mathrm{Im}\,\gamma}$ ~~jest~~ są klasy C^1 dla $k = 1, 2, \ldots, n$.

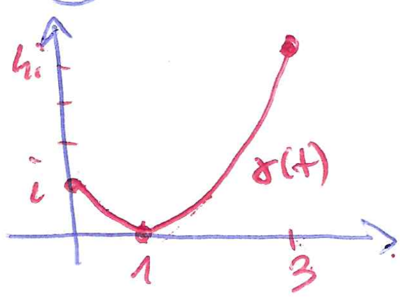
Oznaczenie: $\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta]) \subseteq \mathbb{C}$

(obraz krzywej γ).

<u>Def</u>. Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ będzie drogą, zaś f - funkcją zespoloną ciągłą na γ^*. Całkę z f wzdłuż drogi γ nazywamy

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt. \qquad (*)$$

<u>Przykład</u>.



$\gamma(t) = t + i(t-1)^2, \ t \in [0, 3]$

$$\int_\gamma (\bar{z} - 1)\,dz = \int_0^3 \left(t - i(t-1)^2 - 1\right) \cdot \left(1 + 2i(t-1)\right) dt$$

$$= \int_0^3 (2t^3 - 6t^2 + 7t - 3)\,dt + i\int_0^3 (t-1)^2\,dt =$$

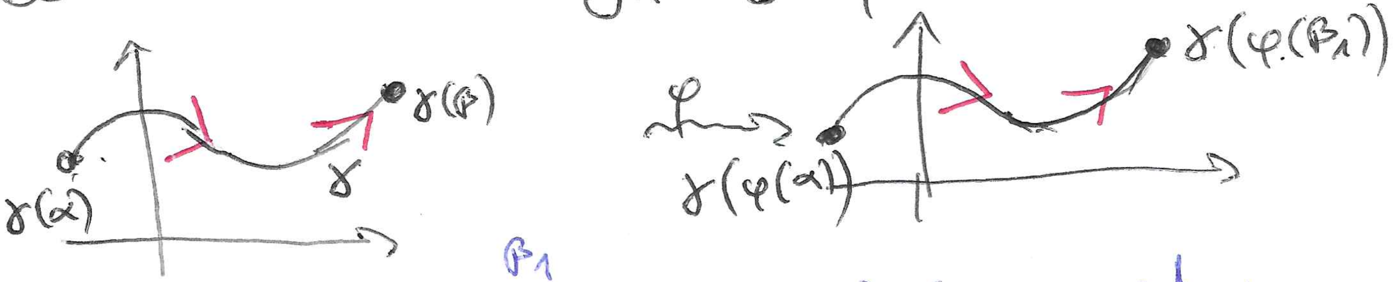
$$= 9 + 3i.$$

Fakt. Całka (*) nie zależy od parametryzacji.

Dowód. Niech $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \longrightarrow [\alpha, \beta]$ będzie bijekcją klasy C^1 i taką, że

$$\varphi(\alpha_1) = \alpha, \quad \varphi(\beta_1) = \beta.$$

Dodatkowo niech $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$



wtedy

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\varphi(t)))\cdot(\gamma\circ\varphi(t))'\,dt =$$

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\gamma(\varphi(t)))\cdot\gamma'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \begin{cases} s = \varphi(t) \\ ds = \varphi'(t)dt \end{cases}$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(s))\cdot\gamma'(s)\,ds = \int_{\gamma} f(z)dz$$

Uwagi.

- Drogi różniące się tylko parametryzacją – będą utożsamiane
- Orientacja ścieżki ma znaczenie:

  dla $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\varphi(t) = \alpha + \beta - t$

  $\varphi(\alpha) = \beta, \quad \varphi(\beta) = \alpha$

  oraz $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$, mamy

  $$\int_{\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma_1} f(z)dz$$

• Ścieżki można łączyć.

Niech $\gamma_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [\beta, \delta] \to \mathbb{C}$ będą danymi ścieżkami takimi, że $\gamma_1(\beta) = \gamma_2(\beta)$.

Wtedy krzywa

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{dla } t \in [\alpha, \beta] \\ \gamma_2(t) & \text{dla } t \in [\beta, \delta] \end{cases}$$

jest ścieżką. Dodatkowo

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Piszemy $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.