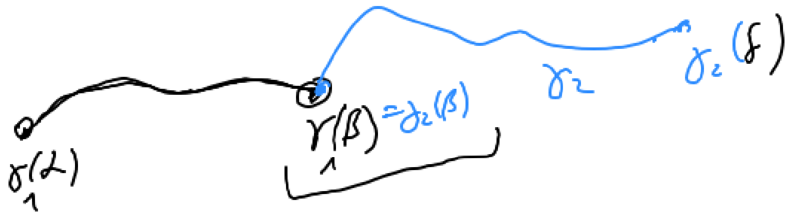
$\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ to <u>droga</u>, jeśli γ jest kawałkami klasy C^1

$\exists_{\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = \beta}$ t.że $\gamma\restriction_{[s_{j-1}, s_j]} \in C^1[s_{j-1}, s_j]$

$\gamma^* = \gamma([\alpha,\beta])$

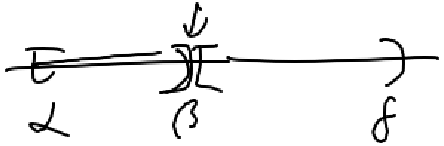
$f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ ciągła

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

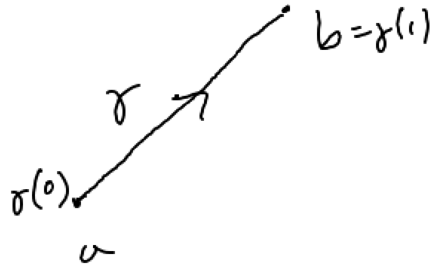


$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ łączenie dróg

koniec γ_1 = początek γ_2

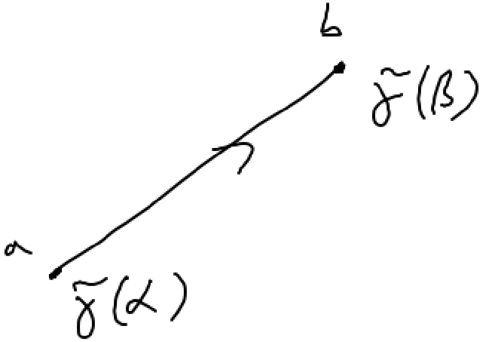


$\gamma(t) = a + (b-a)t \quad , t \in [0,1]$ odcinek zorientowany $\langle a, b\rangle$



$t \in [\alpha, \beta]$

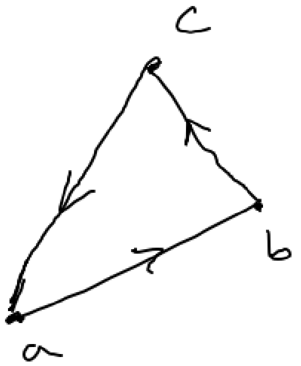
$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{a(\beta - t) + b\cdot(t-\alpha)}{(\beta-\alpha)} \quad , t \in [\alpha,\beta]$$



$\langle \alpha, \beta\rangle$ – takie samo oznaczenie

• Zorientowany brzeg trójkąta $a,b,c \in \mathbb{C}$

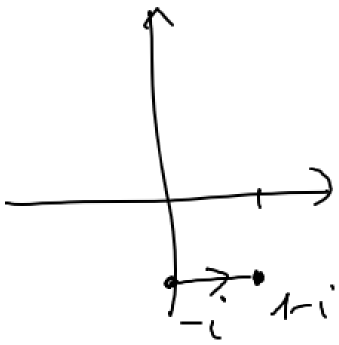
$$\partial\Delta(a,b,c) = \langle a,b\rangle + \langle b,c\rangle + \langle c,a\rangle$$



$$\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz = \int_{\langle a,b\rangle} f(z)\,dz + \int_{\langle b,c\rangle} f(z)\,dz + \int_{\langle c,a\rangle} f(z)\,dz$$

Příklad 1 $\quad \gamma = \langle -i, 1-i \rangle$

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt =$$



$\gamma(t) = -i + t, \quad t \in [0,1]$

$$= \int_0^1 \frac{1}{-i+t} \cdot 1\, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{t+i}{(t-i)(t+i)}\, dt = \int_0^1 \frac{t+i}{t^2+1}\, dt = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\, dt + i \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \Big|_0^1 + i \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) + i(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= \underline{\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} i}$$

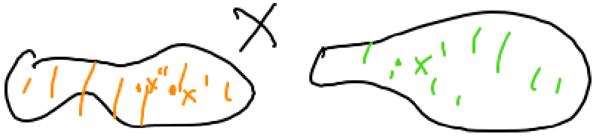
Spójność

Def. Mówimy, że podzbiór E p. metrycznej jest *spójny*, jeśli

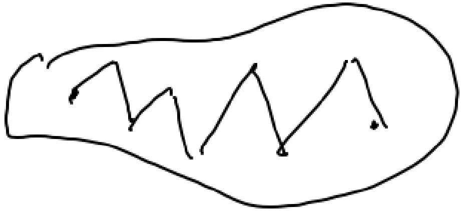
$$\forall_{G_1, G_2} \left(E \subset G_1 \cup G_2,\ G_1 \cap G_2 = \emptyset,\ G_1, G_2 \text{ – otwarte} \Rightarrow \left(E \cap G_1 = \emptyset \vee E \cap G_2 = \emptyset \right) \right)$$

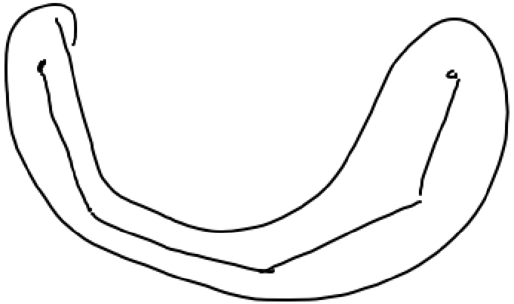
$\mathbb{C}$

~~Uwaga.~~ **Def.** Składową punktu x w p. metrycznej (X, d) nazywamy sumę wszystkich spójnych podzbiorów X zawierających punkt x.



składowe spójne różnych punktów są identyczne lub rozłączne

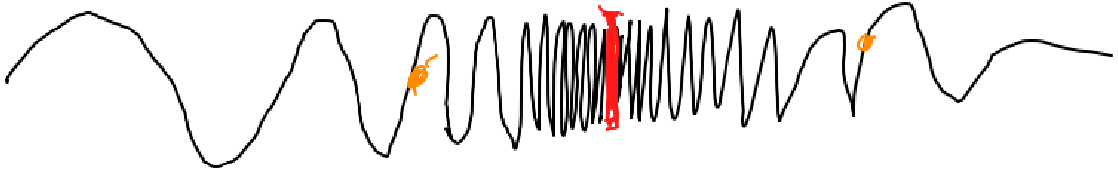




dla <u>w. otwartych</u> w $\mathbb{R}^d$ spójność $\Leftrightarrow$ łukowa spójność (na ćwiczeniach)

$\Leftarrow$ zawsze

$$\{(x, \sin\tfrac{1}{x}) : x \neq 0\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$



Funkcje wykładnicze, f. trygonometryczne

konwencja: $0^0 = 1$

Def.

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

Uwaga: szereg definiujący exp jest wszędzie zbieżny. To wynika z kryt. d'Alemberta: dla ustalonego $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{z}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

$\exp(0) = 1$

$(\exp(z))' = \exp(z)$ $\quad$ ~~sin(z)~~ $\quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$

Uwaga:

$$\sin(z)=\frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(i^n-(-i)^n\right)z^n}{n!}=$$

$$(i)^n-(-i)^n=\begin{cases}0 & ,n=0,4,8,\dots\\ 2i & n=1,5\dots\\ 0 & n=2,6\dots\\ -2i & n=3,7,\dots\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(i^{2k+1}-(-i)^{2k+1}\right)z^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Podobnie $\cos(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ $(z\in\mathbb{C})$

Tw. Dla $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Dd. Ustalmy $w \in \mathbb{C}$ i połóżmy $f(z) = \exp(z+w)\cdot\exp(-z)$. $f \in H(\mathbb{C})$.

$$f'(z) = (\exp(z+w))'\exp(-z) + \exp(z+w)(\exp(-z))' =$$

$$= \exp(z+w)\exp(-z) + \exp(z+w)\exp(-z)(-1) = 0$$

Z zadania z ćwiczeń wynika, że $f =$ const. Biorąc $z=0$ widzimy, że

$$f(z) = f(0)$$

czyli

$$\exp(z+w)\exp(-z) = \exp(w)\exp(0) = \exp(w)$$

$\exp(z+w)\frac{1}{\exp(z)} = \exp(w)$

Biorąc $w=0$: $\exp(z)\exp(-z) = 1 \Rightarrow \exp(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ $\boxtimes$

Def:

$$e := \exp(1)$$

Oznaczmy $e^z := \exp(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$

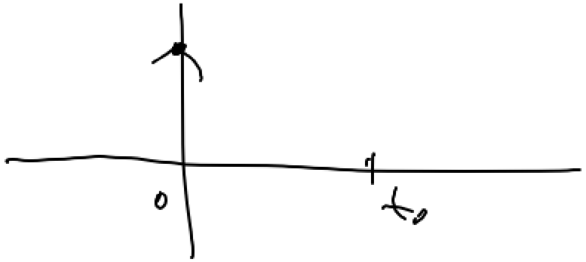
$$e^{z+w} = e^z e^w$$

$$\exp(2) = e^2 = e^{1+1} = e^1 e^1 = e \cdot e = (e)^2$$

$$\exp(n) = (e)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Tw. (ćwiczenia)

Istnieje najmniejsza liczba dodatnia t_0 taka, że $\cos t_0 = 0$.



Def. $\pi := 2t_0$

wp. można pokazać:

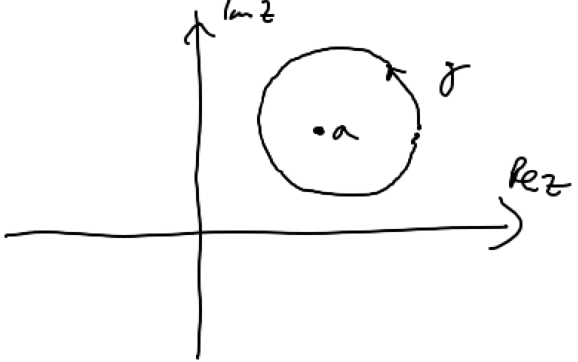
$\sin \pi = 0$ $\quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ $(z \in \mathbb{C})$

Indeks punktu względem drogi

- okrąg orientowany dodatnio: $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$a \in \mathbb{C}$, $r > 0$



$$\int_\gamma f(z)\,dz = r\int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \cdot ri\, e^{it}\,dt$$

Tw. Załóżmy, że γ jest drogą zamkniętą i $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

$\gamma^* = \gamma([\alpha,\beta])$ — zb. zwarty, więc domknięty

Przyjmijmy dla $z \in \Omega$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

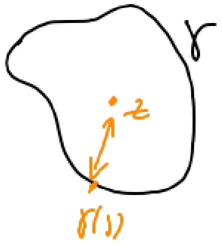
Wtedy $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ jest funkcją o wartościach całkowitych, stałą na każdej składowej spójności zbioru Ω i równą zero na składowej nieograniczonej.

<u>Dd.</u> Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ oraz niech $\alpha = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = \beta$, przy czym $\gamma\restriction_{[s_{k-1}, s_k]} \in C^1([s_{k-1}, s_k])$. Niech $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\}$. Ustalmy $z \in \Omega$. Wtedy

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)\,ds}{\gamma(s) - z}.$$

Ponieważ $\frac{w}{2\pi i} \in \mathbb{Z} \iff \exp(w) = 1$ (d-d na ćwiczeniach), więc dla dowodu $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$ wystarczy sprawdzić, że $\varphi(\beta) = 1$, gdzie

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)\,ds}{\gamma(s) - z} \right).$$



Dla $t \in [\alpha, \beta] \setminus S$ mamy

$$\varphi'(t) = \exp(\ldots) \cdot \left(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)\,ds}{\gamma(s) - z} \right)'_t = \exp(\ldots) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} = \varphi(t) \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}.$$

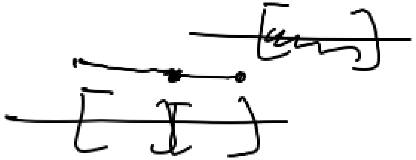
$\boxed{\varphi' = \varphi \frac{\gamma'}{\gamma - z}}$

Policzmy, dla $t \in [\alpha, \beta] \setminus S$:

$$\left(\frac{\varphi}{\gamma - z}\right)'(t) = \frac{\varphi'(t)(\gamma(t)-z) - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = \frac{\varphi(t)\frac{\gamma'(t)}{\cancel{\gamma(t)-z}}\cancel{(\gamma(t)-z)} - \varphi(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = 0$$

$\frac{\varphi}{\gamma - z}$ jest funkcją ciągłą i jej pochodna $= 0$ na każdym (s_{k-1}, s_k)

Stąd $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ jest stała na każdym odcinku $[s_{k-1}, s_k]$, a więc $\frac{\varphi}{\gamma-z}$ jest stała na $[\alpha, \beta)$. Stąd



$$\frac{\varphi(\beta)}{\gamma(\beta)-z} = \frac{\varphi(\alpha)}{\gamma(\alpha)-z} = \frac{1}{\gamma(\alpha)-z}$$

$$\Rightarrow \varphi(\beta) = \frac{\gamma(\beta)-z}{\gamma(\alpha)-z} = 1.$$

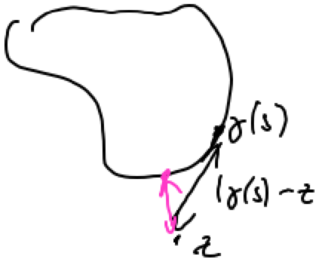
$\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ (bo γ - droga zamknięta)

To dowodzi, że $\mathrm{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds}$$

z tw. z poprzedniego wykładu, ta funkcja, jako funkcja zmiennej $z \in \Omega$, jest holomorficzna

$\mathrm{Ind}_\gamma \in H(\Omega)$, a więc też $\mathrm{Ind}_\gamma \in C(\Omega)$. Zatem Ind_γ przekształca składowe spójne zbioru Ω w spójne podzbiory $\mathbb{Z}$, innymi słowy, Ind_γ jest stały na każdej składowej spójności.



$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(s)|}{|\gamma(s)-z|}\,ds \le \frac{1}{2\pi}\int_\alpha^\beta \frac{|\gamma'(s)|}{\mathrm{dist}(z,\gamma^*)}\,ds =$$

$$|\gamma(s)-z| \ge \mathrm{dist}(z,\gamma^*) > 0$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\mathrm{dist}(z,\gamma^*)}\int_\alpha^\beta |\gamma'(s)|\,ds \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0.$$

Stąd $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ dla z ze skł. nieogr. Ω

Przykład

Niech $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $r > 0$.

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)\,dt}{\gamma(t) - a} =$$

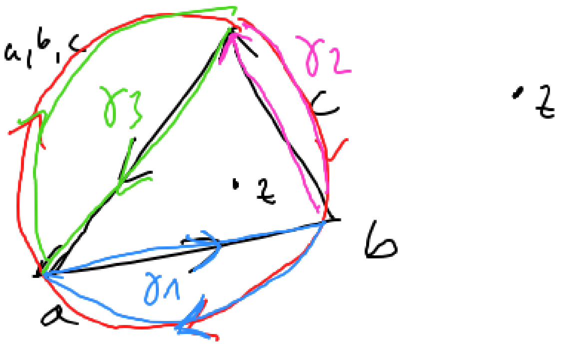
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{r} i \cancel{e^{it}}\, dt}{(\cancel{a} + \cancel{r}\cancel{e^{it}}) - \cancel{a}} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i \, dt = 1$$

Z popr. tw. wynika, że

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1, & z \in D(a,r) \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D(a,r)} \end{cases}$$

$\Delta = \Delta(a,b,c)$ — dodatnio zorientowany

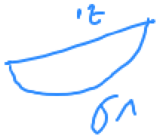
$$\operatorname{Ind}_{\partial\Delta}(z) = \begin{cases} 0, & z \text{ jest poza trójkątem o wierz. } a,b,c \\ 1, & z \text{ jest wewn. } - \text{"} - \end{cases}$$



Rozważmy ujemnie zorientowany okrąg γ opisany na Δ.

$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = -1$ (z poprzedniego zadania i z własności $\int_\gamma$)

$\operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$ (bo leżymy w składowej nieogr. $\mathbb{C} \setminus \gamma_1^*$)



$\operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z) = 0$

$\operatorname{Ind}_{\gamma_3}(z) = 0$

skracają się całki po łukach okręgu

$$1 = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z) + \operatorname{Ind}_{\gamma_2}(z) + \operatorname{Ind}_{\gamma_3}(z) - \operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} - \int_\gamma\right)\frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta}\frac{dw}{w-z} = \operatorname{Ind}_{\partial\Delta}(z)$$