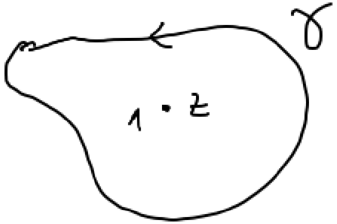
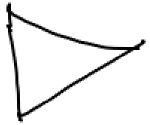
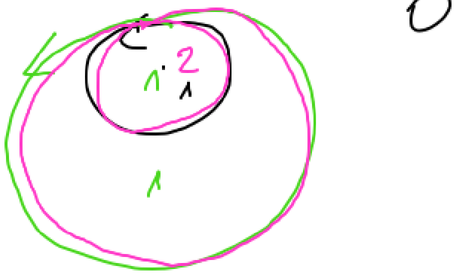
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$



$\gamma^* \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{C}\setminus\gamma^*$





Tw. Cauchy'ego i wnioski

Na ćwiczeniach udowodnimy, że

$$\int_\gamma F'(z)\,dz = F(b) - F(a),$$

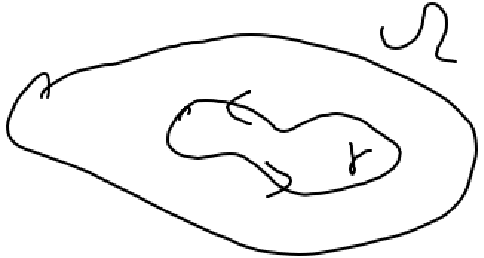
jeśli $F\in H(\Omega)$, $F'\in C(\Omega)$, γ – droga w Ω o początku w a i końcu w b

$$\int_\alpha^\beta F'(t)\,dt = F(\beta)-F(\alpha)$$

Tw. Jeśli $F\in H(\Omega)$ oraz $f=F'\in C(\Omega)$, to

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

dla dow. drogi zamkniętej γ w Ω.



Wniosek. Zachodzi $\int_\gamma z^n\,dz = 0$, $n=0,1,2,\ldots$

dla dow. drogi zamkniętej w $\mathbb{C}$.

Dd: $(z^n) = \left(\frac{z^{n+1}}{n+1}\right)'$

Tw. (Cauchy'ego dla trójkątów)

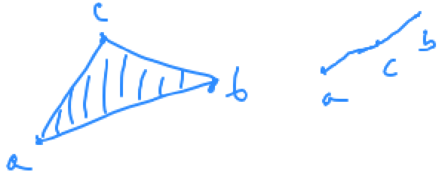
Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, $p \in \Omega$. Niech $\underbrace{f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)}$.

(ozn. że $f \in C(\Omega)$ i f' istnieje na $\Omega \setminus \{p\}$)

Wówczas dla trójkątów $\Delta \subset \Omega$ mamy

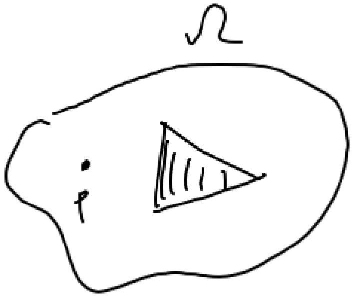
$$\int_{\partial \Delta} f(z)\, dz = 0.$$

$\Delta(a,b,c)$ oznacza najmniejszy zbiór wypukły zawierający a, b, c



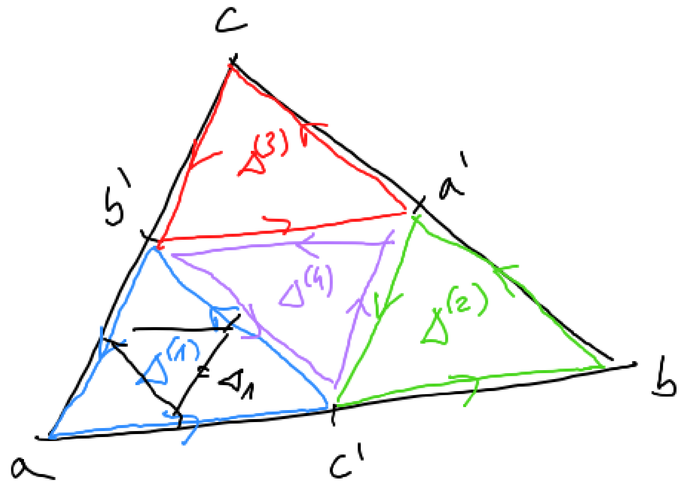
$$\int_{\partial \Delta(a,b,c)} f = \left(\int_{\langle a,b \rangle} + \int_{\langle b,c \rangle} + \int_{\langle c,a \rangle} \right) f$$

Dd. Załóżmy najpierw, że $p \notin \Delta$.



Niech $\Delta = \Delta(a,b,c)$. Niech a', b', c' oznaczają odpowiednio środki odcinków $[b,c], [c,a], [a,b]$.

Niech $\Delta^{(1)} = \Delta(a, c', b')$, $\Delta^{(2)} = \Delta(c', b, a')$,
$\Delta^{(3)} = \Delta(b', a', c)$, $\Delta^{(4)} = \Delta(a', b', c')$.



Zachodzi

$$J := \int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz = \left(\int_{\partial\Delta^{(1)}} + \int_{\partial\Delta^{(2)}} + \int_{\partial\Delta^{(3)}} + \int_{\partial\Delta^{(4)}}\right) f(z)\,dz$$

Wobec tego przynajmniej jedna z całek po prawej jest co do modułu większa lub równa od $\frac{|J|}{4}$.

Oznaczmy odpowiadający jej trójkąt przez Δ_1.

$$\left|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|J|}{4}, \quad \ell(\partial\Delta_1) = \frac{1}{2}\,\ell(\partial\Delta) =: \frac{1}{2}L$$

długość

Powtarzamy powyższą konstrukcję dla trójkąta Δ_1, itd., otrzymamy ciąg trójkątów $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \dots$ t. że

$$\left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|J|}{4^n} \quad \text{oraz} \quad \ell(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n} L.$$

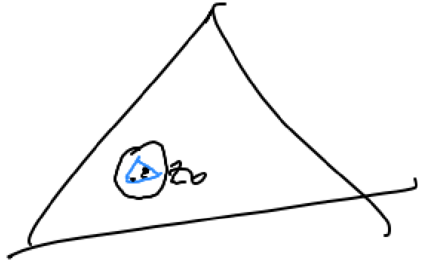
Ze zwartości zbiorów Δ_j wynika, że istnieje punkt $z_0 \in \Delta_j$ dla każdego j.

Punkt $z_0 \in \Delta$, wtedy istnieje $f'(z_0)$. Weźmy dow. $\varepsilon > 0$. Istnieje $r > 0$ takie, że

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad 0<|z-z_0|<r$$

stąd

$$(*) \quad |f(z)-f(z_0) - f'(z_0)(z-z_0)| < \varepsilon|z-z_0| \quad -\,\|\,- \qquad .$$



Istnieje n takie, że jeśli $z\in\Delta_n$, to $|z-z_0|<r$.

(bo $\operatorname{diam}\Delta_n = \frac{1}{2^n}\operatorname{diam}\Delta \to 0$ oraz $z_0\in\Delta_n$).

Wtedy dla $z\in\Delta_n$: $(**)\ |z-z_0| \le \operatorname{diam}\Delta_n \le \ell(\Delta_n) = \frac{1}{2^n}L$.

$$\frac{|J|}{4^n} \le \varepsilon\frac{L^2}{4^n}$$

$$|J| \le \varepsilon L^2.$$

z dow. $\varepsilon>0$ wynika, że $J=0$.

Zachodzi

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n}\left[f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\right]dz \quad ,$$

z poprzedniego wniosku

zatem z zadania z ćwiczeń

$$\frac{|J|}{4^n} \le \left|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta_n}(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,dz\right| \overset{\text{zadanie z ćw}}{\le}$$

$$\le \ell(\Delta_n)\cdot\sup_{z\in\partial\Delta_n^*}\left|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)\right| \underset{(*)+(**)}{\le} \ell(\Delta_n)\cdot\varepsilon\cdot\frac{1}{2^n}L = \varepsilon\left(\frac{1}{2^n}L\right)^2$$

z popr. strony

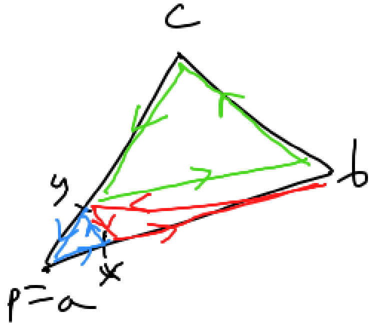
To łatwy dowód w przypadku, gdy $p \notin \Delta$.

Teraz załóżmy, że $p \in \Delta$.

1) Jeśli Δ jest zdegenerowany do odcinka, tj. a, b, c są współliniowe, to

$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$ z własności całki

2) Załóżmy najpierw, że p jest jednym z wierzchołków, np. $p = a$.
Wybierając punkty $x \in \langle a,b\rangle^*$ oraz $y \in \langle a,c\rangle^*$ dostatecznie blisko p, dostajemy, że



$$\left|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\partial\Delta(b,y,x)} f(z)\,dz}_{=0} + \underbrace{\int_{\partial\Delta(b,c,y)} f(z)\,dz}_{=0}\right| = \left|\int_{\partial\Delta(a,x,y)} f(z)\,dz\right| \le$$

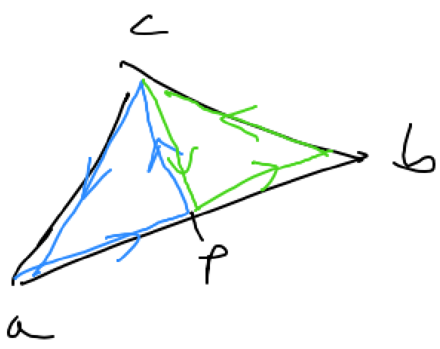
z już udowodnionej części

$$\le \ell(\partial\Delta(a,x,y)) \cdot \sup_{z \in \partial\Delta(a,x,y)} |f(z)| \le \ell(\partial\Delta(a,x,y)) \cdot \underbrace{\sup_{z \in \Delta} |f(z)|}_{<\infty} \to \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0.$$

• Jeśli p leży w jednym z boków, np $\langle a,b\rangle^* \setminus \{a,b\}$, to

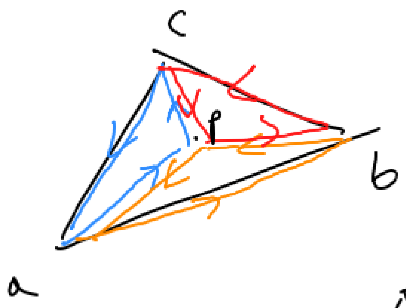
$$\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z) = \left(\int_{\partial\Delta(a,p,c)} + \int_{\partial\Delta(p,b,c)}\right) f(z)\,dz = 0$$

z poprz. części



• Jeśli $p \in \operatorname{Int}\Delta$, to:

$$\int_{\partial\Delta(a,b,c)} f(z)\,dz = \left(\int_{\partial\Delta(a,b,p)} + \int_{\partial\Delta(b,c,p)} + \int_{\partial\Delta(c,a,p)}\right) f(z)\,dz = 0$$



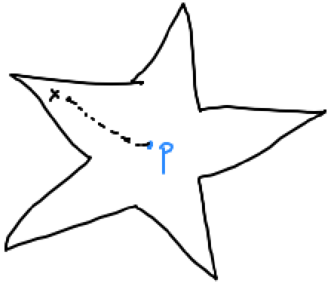
$\boxtimes$

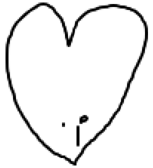
$f \in C(\Omega) \cap H(\Omega\setminus\{p\})$

$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$ ma sens, ale nie są spełnione założenia poprz. tw. i $\Delta \not\subset \Omega$

Definicja Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ nazywamy **gwiaździstym** względem punktu $p \in E$, jeśli

$$\forall_{x \in E} \ (\text{odcinek } \langle p, x\rangle^* \subset E).$$





$E \subset \mathbb{C}$

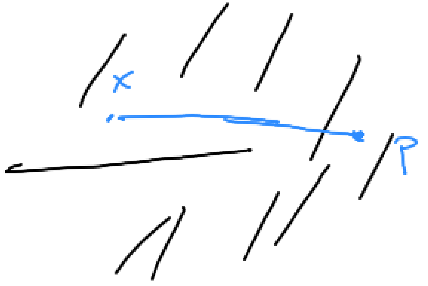
Zb. jest wypukły, jeśli

$$\forall_{p \in E} \forall_{x \in E} \ \langle p, x\rangle^* \subset E$$

Def – cd.

Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ nazywamy gwiaździstym, jeśli

$$\exists_{p \in E} \forall_{x \in E} \ \langle p, x\rangle^* \subset E.$$



$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

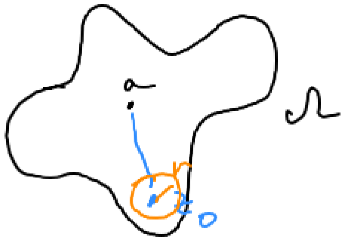
Tw (Cauchy'ego dla zbioru gwiaździstego ; o funkcji pierwotnej)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zb. otwartym i gwiaździstym. Niech $p \in \Omega$, niech $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$. Wówczas istnieje $F \in H(\Omega)$ taka, że $F' = f$ na Ω.

W szczególności

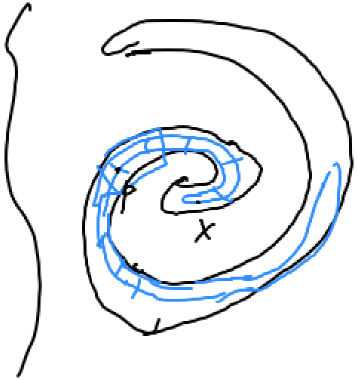
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

dla dow. drogi zamkniętej γ w Ω.



D-d, Ustalmy punkt $a \in \Omega$, względem którego Ω jest gwiaździsty. Wówczas $\langle a, z\rangle^* \subset \Omega$ dla dowolnego $z \in \Omega$, możemy więc zdefiniować

$$F(z) = \int_{\langle a, z\rangle} f(w)\, dw \quad , z \in \Omega.$$



Ustalmy $z_0 \in \Omega$. Istnieje $r > 0$ takie, że $D(z_0, r) \subset \Omega$.

Wówczas dla $z \in D(z_0, r)$ zachodzi $\Delta(a, z_0, z) \subset \Omega$.

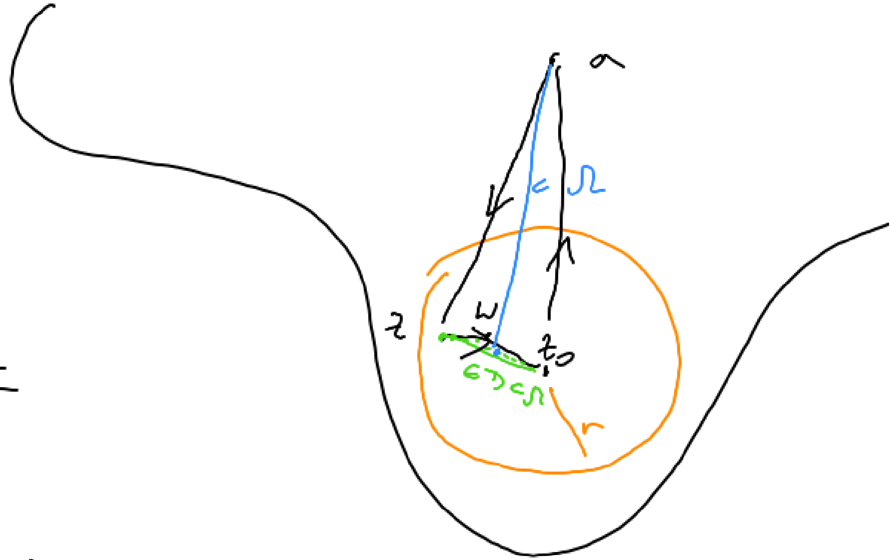
$\Delta(a, z_0, z) \subset \Omega$. Zatem z poprzedniego tw.

otrzymujemy: (dla $z \in D(z_0, r)$)

$$F(z) - F(z_0) = \left(\int_{\langle a, z \rangle} - \int_{\langle a, z_0 \rangle} \right) f(w)\, dw =$$

$$= \left(\int_{\langle a, z \rangle} + \int_{\langle z_0, z \rangle} + \int_{\langle z, z_0 \rangle} \right) f(w)\, dw - \int_{\langle z, z_0 \rangle} f(w)\, dw =$$

$$= \int_{\partial \Delta (a, z_0, z)} f(w)\, dw + \int_{\langle z_0, z \rangle} f(w)\, dw \underset{\text{popn. tw.}}{=} 0 + \int_{\langle z_0, z \rangle} f(w)\, dw,$$

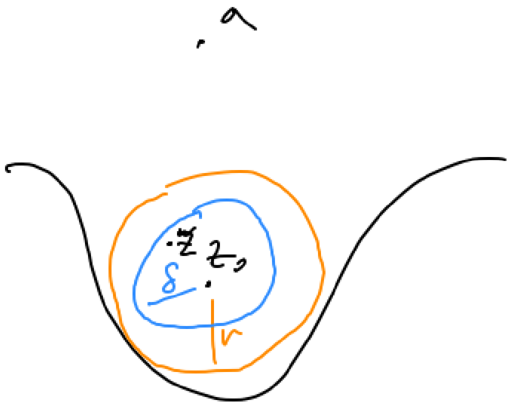


skąd

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{\langle z_0, z \rangle} f(w)\, dw - \frac{f(z_0)}{z - z_0} \underbrace{\int_{\langle z_0, z \rangle} 1\, dw}_{1 = (z)' \to z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_{\langle z_0, z \rangle} \left(f(w) - f(z_0) \right) dw$$

(dla $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\} =: D'(z_0, r)$)

Niech $\varepsilon > 0$. Istnieje $\delta \in (0, r)$ taka, że $|f(w) - f(z_0)| < \varepsilon$ dla $w \in D(z_0, \delta)$ (to wynika z ciągłości f w z_0). Dla $z \in D'(z_0, \delta)$



$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| = \left| \frac{1}{z - z_0} \int_{\langle z_0, z\rangle} \big(f(w) - f(z_0)\big)\, dw \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|z - z_0|} \cdot \underbrace{l(\langle z_0, z\rangle)}_{|z - z_0|} \cdot \sup_{w \in \langle z_0, z\rangle^{*}} |f(w) - f(z_0)| \leq \varepsilon$$

To znaczy, że $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = f(z_0)$, czyli $F'(z_0)$ istnieje i $= f(z_0)$.

Reszta wynika z poprzedniego twierdzenia. $\boxtimes$

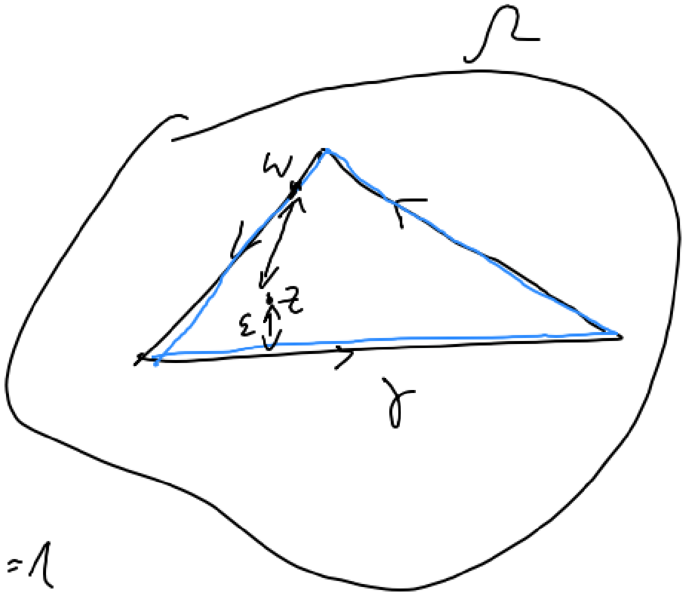
Tw. (wzór Cauchy'ego)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty, gwiaździsty, γ – droga zamknięta w Ω, $z \in \Omega \setminus \gamma^*$.

Wówczas dla $f \in H(\Omega)$ zachodzi:

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{w-z}\,dw$$



$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$