TW. (wzór Cauchy'ego)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, gwiaździstym, γ - droga zamknięta w Ω, $z \in \Omega \setminus \gamma^*$. Wówczas dla $f \in H(\Omega)$ mamy

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

D-d

Ustalmy $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ i określamy

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{dla } w \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{dla } w = z. \end{cases}$$

Wtedy $g \in H(\Omega \setminus \{z\})$ oraz $g \in C(\Omega)$, zatem z poprzedniego tw. Cauchy'ego$^{(*)}$ dostajemy

$$0 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(w)\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{w-z}\,dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \mathrm{Ind}_\gamma(z)\,f(z)$$

Stąd teza. $\boxtimes$

WNIOSEK

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω - otwarty, gwiaździsty, γ - droga zamknięta w Ω, $p \in \Omega \setminus \gamma^*$. Wówczas dla $f \in H(\Omega)$ mamy

$$(f\,\mathrm{Ind}_\gamma)^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,dw$$

PRZYPOMNIENIE

Jeśli $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ jest ciągła, $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ - mierzalna i ograniczona, to funkcja

$$f(z) = \int_a^b \frac{\psi(t)}{\varphi(t)-z}\,dt$$

dla dowolnego $D(z_0,R) \subset \Omega$ przedstawia się szeregiem potęgowym o środku w z_0 i promieniu zbieżności co najmniej R.

W szczególności
$$f^{(n)}(z) = n! \int_a^b \frac{\psi(t)}{(\varphi(t)-z)^{n+1}}\,dt.$$

D-d (wniosku)

Niech $\gamma : [\alpha,\beta] \to \Omega$. Mamy
$$g(p) := f(p)\,\mathrm{Ind}_\gamma(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-p}\,dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}\,dt$$

Zatem g rozwija się w szereg potęgowy (Przypomnienie!) oraz
$$g^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \frac{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{(\gamma(t)-p)^{n+1}}\,dt$$
$$= \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,dw. \qquad \boxtimes$$

TW.

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$, dowolny zbiór otwarty, $f \in H(\Omega)$. Wówczas dla każdego $p \in \Omega$ funkcja f jest rozwijalna w szereg potęgowy o środku w punkcie p; szereg ten jest zbieżny na każdym dysku $D(p,R) \subset \Omega$; mamy ponadto
$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(p+re^{it})\,e^{-int}\,dt$$
dla $n = 0,1,2,\dots$, jeśli $\overline{D(p,R)} \subset \Omega$.

D-d

Niech $D(p,R)\subset\Omega$ oraz niech $0<r<R$.

Niech
$$\gamma(t) = p+re^{it}, \quad t\in[0,2\pi]$$

Ze wzoru Cauchy'ego dla $D(p,R)$ mamy
$$f(z) = f(z)\,\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$
dla $z\in D(p,r)$.

Dalej:
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt$$
więc f rozwija się w szereg potęgowy, zbieżny na $D(p,r)$ (Przypomnienie!).

Z dowolności wyboru $r<R$ oraz z jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy otrzymujemy pierwszą część tezy.

Ponadto
$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\,\gamma'(t)}{(\gamma(t)-p)^{n+1}}\,dt$$
$$= \frac{n!}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} \frac{f(p+re^{it})\,r\cancel{i}e^{it}}{(re^{it})^{n+1}}\,dt$$
$$= \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(p+re^{it})\,e^{-int}\,dt. \qquad \boxtimes$$

WNIOSEK

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$, Ω - otwarty zbiór, $p \in \Omega$.
Jeśli $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap C(\Omega)$, to $f \in H(\Omega)$.

D-d

Niech $D(p,r) \subset \Omega$. Ponieważ $D(p,r)$ jest wypukły, to również gwiaździsty, więc z tw. o funkcji pierwotnej istnieje $F \in H(D(p,r))$ taka $F' = f$ na $D(p,r)$.

Z poprzedniego tw. F, jako funkcja holomorficzna, ma pochodne dowolnego na $D(p,r)$, więc w szczególności istnieje

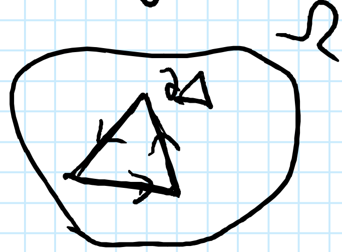
$$F'' = (F')' = (f)' = f'$$

czyli $f'(p)$ istnieje. $\boxtimes$

TW. (Morery)

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym.
Jeśli $f \in C(\Omega)$ oraz

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$$



dla dowolnego trójkąta $\Delta \subset \Omega$, to $f \in H(\Omega)$.

D-d

Niech $D(p,r) \subset \Omega$. Zdefiniujmy

$$F(z) = \int_{\langle p,z \rangle} f(w)\,dw \quad \text{dla } z \in D(p,r).$$

Tak jak poprzednio pokazujemy, że $F' = f$ na $D(p,r)$.
Zatem $F \in H(D(p,r))$, więc również $f = F'$
jest holomorficzna na $D(p,r)$.
Z dowolności $D(p,r) \subset \Omega$ dostajemy, że $f \in H(\Omega)$. $\boxtimes$

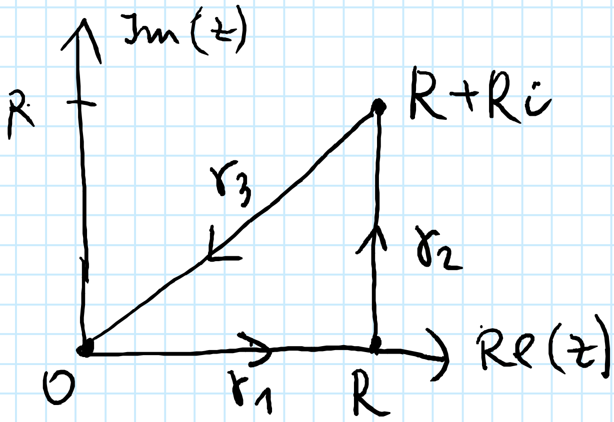
$\boxed{\text{PRZYKŁAD}}$

Wyznacz $\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt$, $\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt$.

Rozw.

Całkujemy $f(z) = e^{iz^2}$ po trójkącie $\langle 0,R \rangle$, $\langle R, R+Ri \rangle$, $\langle R+Ri, 0 \rangle$

(bo $\operatorname{Re} f(t) = \cos(t^2)$, $\operatorname{Im} f(t) = \sin(t^2)$ dla $t \in \mathbb{R}$).



$$\Delta = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

$\gamma_1(t) = t$ dla $t \in [0,R]$

$\gamma_2(t) = R + it$ dla $t \in [0,R]$

$(-\gamma_3)(t) = (1+i)t$, $t \in [0,R]$

Z tw. Cauchy'ego

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0, \text{ bo } f \in H(\mathbb{C}).$$

ale $\int_{\partial\Delta} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3}$

$$\gamma_1(t)=t,\quad \gamma_2(t)=R+it,\quad (-\gamma_3)(t)=(1+i)t,\quad t\in[0,R],\quad f(z)=e^{iz^2}$$

- $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^R e^{it^2}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty (\cos t^2 + i\sin t^2)\,dt$

- $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^R i e^{i(R+it)^2}\,dt = i\int_0^R e^{i(R^2-t^2+2Rti)}\,dt$

$$= i\int_0^R e^{-2Rt}\, e^{i(R^2-t^2)}\,dt$$

ale

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_0^R \Big|\underbrace{i}\, e^{-2Rt}\, \underbrace{e^{i(R^2-t^2)}}_{\text{moduł}=1}\Big|\,dt = \int_0^R e^{-2Rt}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-2Rt}}{-2R}\right]_{t=0}^{t=R} = \frac{e^{-2R^2}-1}{-2R} \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

- $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_0^R e^{i((1+i)t)^2}(1+i)\,dt$

$$= -(1+i)\int_0^R e^{-2t^2}\,dt \xrightarrow{R\to+\infty} -(1+i)\int_0^\infty e^{-2t^2}\,dt$$

$$= -(1+i)\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{(1+i)}{2}\,\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\frac{1}{2}}}e^{-\frac{t^2}{2\cdot(\frac{1}{2})^2}}\,dt}_{=1 \text{ bo to gęstość } \mathcal{N}(0,(\frac{1}{2})^2)}$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$$

Stąd $\displaystyle\int_0^\infty (\cos t^2 + i\sin t^2)\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i)$

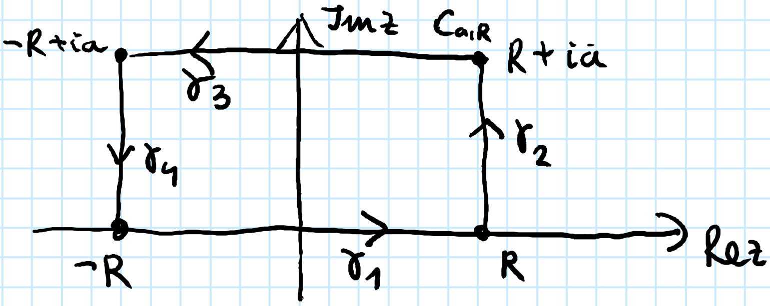
więc $\displaystyle\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt = \int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$

$\boxed{\text{PRZYKŁAD}}$

Pokaż, że $\quad I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi w} e^{-w^2}\, dw = \sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}, \quad \xi \in \mathbb{R}.$

Rozw.

Niech $f(z) = e^{i\xi z} e^{-z^2}$. Całkujemy f po prostokącie o wierzchołkach $\pm R$, $\pm R + ia$, $a>0, R>0$.



$$C_{a,R} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

$$\gamma_1(t) = t, \quad t \in [-R,R]$$
$$\gamma_2(t) = R+it, \quad t \in [0,a]$$
$$(-\gamma_3)(t) = t+ia, \quad t \in [-R,R]$$
$$(-\gamma_4)(t) = -R+it, \quad t \in [0,a]$$

Wiemy, że $f \in H(\mathbb{C})$, więc z tw. Cauchy'ego

$$0 = \int_{C_{a,R}} f(z)\,dz = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right) f(z)\,dz$$

- $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} e^{i\xi t} e^{-t^2}\, dt \xrightarrow{R\to+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} e^{-t^2}\, dt.$

- $\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| = \left| i \int_0^a e^{i\xi(R+it)} e^{-(R+it)^2}\, dt \right|$

$$= \left| \underline{i} \int_0^a \underline{e^{i\xi R}}\, e^{-\xi t} e^{-R^2} \underline{e^{-2Rti}}\, e^{t^2}\, dt \right|$$

$$\leq \int_0^a e^{-\xi t} e^{-R^2} e^{t^2}\, dt = e^{-R^2} \int_0^a e^{-\xi t} e^{t^2}\, dt$$

$\xrightarrow{R\to\infty} 0$, podobnie pokazujemy, że $\left| \int_{\gamma_4} f(z)\,dz \right| \xrightarrow{R\to\infty} 0.$

- $\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R}^{R} e^{i\xi(t+ia)} e^{-(t+ia)^2}\, dt$

$$= -\int_{-R}^{R} e^{i\xi t}\, \underline{e^{-\xi a}}\, e^{-t^2} e^{-2ati}\, \underline{e^{a^2}}\, dt$$

$$= -e^{a^2} e^{-\xi a} \int_{-R}^{R} e^{-t^2} e^{ti(\xi-2a)}\, dt$$

$$= -e^{a^2} e^{-\xi a} \int_{-R}^{R} e^{-t^2} e^{ti(\xi - 2a)} dt$$

Jeśli $\xi = 2a$ tzn. $a = \xi/2$ to $e^{ti(\xi-2a)} = 1$ oraz

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -e^{\xi^2/4} e^{-\xi^2/2} \int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt$$

$$\xrightarrow{R \to +\infty} -e^{-\xi^2/4} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt}_{\sqrt{\pi}}$$

Zatem

$$0 = \left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} \right) f(z)dz$$

czyli

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi w} e^{-w^2} dw = e^{-\xi^2/4} \cdot \sqrt{\pi}$$

tak jak chcieliśmy.