Ω - gwiaździsty (otwarty) $f \in H(\Omega)$

γ - droga zamkn. w Ω

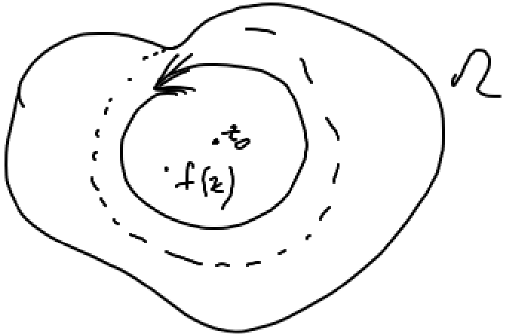
Dla $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ zachodzi

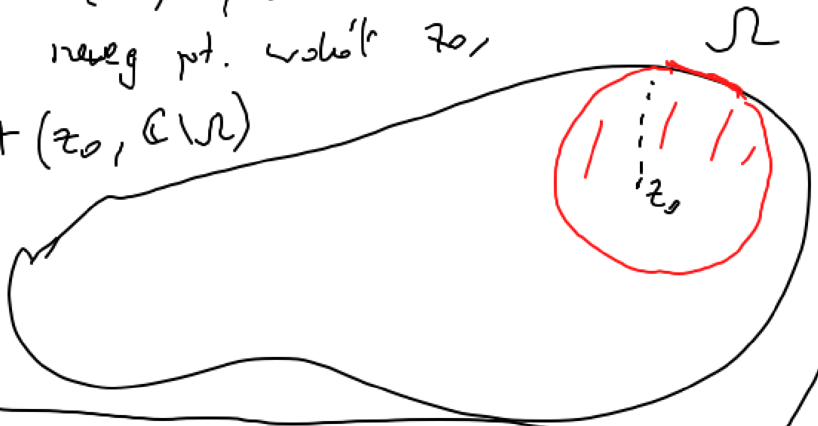
$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Ω - otwarty, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$

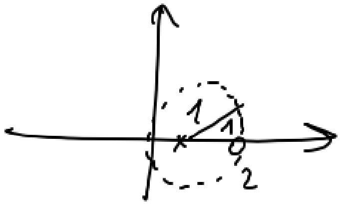
f rozwija się w szereg pot. wokół z_0,

promień zb. $\geq \mathrm{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$



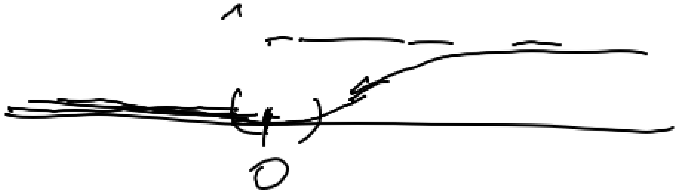


$f(z) = \frac{1}{z-2}$ wokół 1 $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{2\})$



Istnieje $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, która nie rozwija się w szereg potęgowy wokół 0.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$



$$f^{(n)}(0) = 0$$

Tw. (o zerach)

Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zb. otwartym i spójnym, $f \in H(\Omega)$

i

$$Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

Wtedy albo $Z(f) = \Omega$, albo $Z(f)$ nie ma punktu skupienia w Ω.

W tym drugim przypadku, dla każdego $a \in Z(f)$, istnieje jedyna liczba całkowita $m = m(a)$ taka, że

$$(*) \qquad f(z) = (z-a)^m g(z),$$

gdzie $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$. Co więcej, zbiór $Z(f)$ jest co najwyżej przeliczalny.

Liczbę m jw. nazywamy rzędem pierwiastka f w punkcie a.

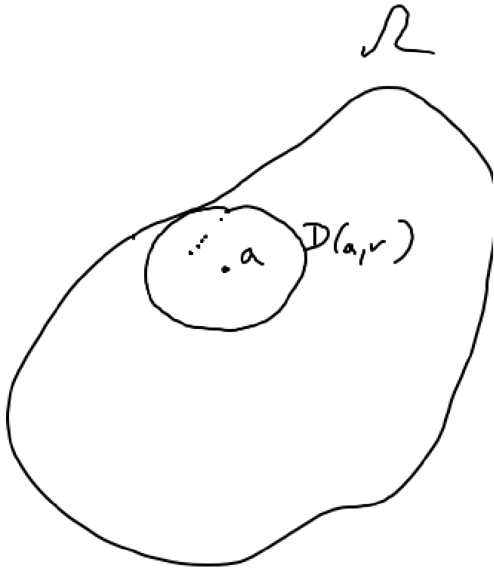
<u>Def.</u> A = zbiór wszystkich punktów skupienia $Z(f)$ w Ω

$$= \{ z \in \Omega : z \in \overline{Z(f) \setminus \{z\}} \}.$$

- Ustalmy punkt $a \in Z(f)$ i wybierzmy $r > 0$ tak, aby $D(a,r) \subset \Omega$.

Wtedy z tw. o rozwijalności w szereg potęgowy,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a,r)).$$



Są dwie możliwości:

1) wszystkie $c_n = 0$. Wtedy $f = 0$ na $D(a,r)$, więc

$D(a,r) \subset Z(f)$, czyli $D(a,r) \subset A$.

Zatem $a \in \operatorname{Int} A$.

2) nie wszystkie c_n są zerami, a więc istnieje najmniejsza liczba całkowita m taka, że $c_m \neq 0$. Ponieważ $f(a) = 0 = c_0$, więc $m > 0$.

Niech

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^{-m} \cdot f(z) & \text{dla } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ c_m & \text{dla } z = a. \end{cases}$$

Wtedy zachodzi wzór $(*)$, $g \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Ponadto dla $z \in D(a,r)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z-a)^n,$$

więc

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m} (z-a)^n \qquad (z \in D(a,r)).$$

$\Big\{$ dla $z \neq a$ to wynika z powyższej równości, a dla $z = a$ z def. g

To oznacza, że $g'(a)$ istnieje, a więc $g \in H(\Omega)$.

Ponadto $g(a) = c_m \neq 0$. Z ciągłości g, $g \neq 0$ na pewnym sąsiedztwie a, a więc ~~też~~ $f \neq 0$ na tym sąsiedztwie a.

Zatem a jest punktem izolowanym $Z(f)$ $(a \notin A)$.

$A \subset Z(f)$ z ciągłości f

Zatem jeśli $a \in A$, to też $a \in Z(f)$ i musi zachodzić pierwszy z powyższych dwóch przypadków, a więc $a \in \operatorname{Int} A$. To oznacza, że $A = \operatorname{Int} A$, czyli A jest otwarty.

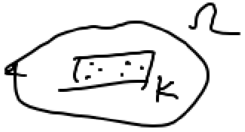
A jest też domknięty w Ω, jako zbiór punktów skupienia w Ω pewnego zbioru.

$B := \Omega \setminus A$, to $\Omega = A \cup B$, A, B – otwarte, rozłączne.

Ze spójności $A = \emptyset$ lub $B = \emptyset$, więc (odpowiednio) $A = \emptyset$ lub $Z(f) = \Omega$.

w przypadku $A = \emptyset$:

Jeśli $K \subset \Omega$ jest zwarty, to $Z(f) \cap K$ jest skończony, stąd

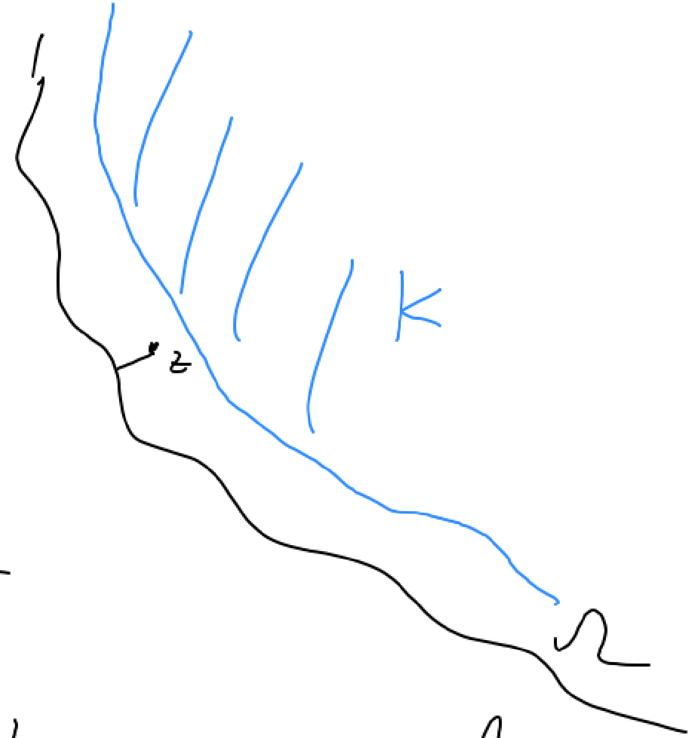


$Z(f)$ jest co najwyżej przeliczalny. $\boxtimes$

$$K_n = \{ z \in \Omega : \operatorname{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \tfrac{1}{n} \} \cap \overline{B}(0, n)$$

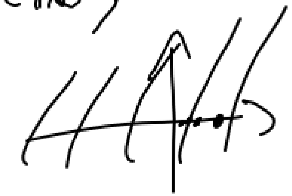
$[\tfrac{1}{4}, \infty)$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$$, K_n - zwarte



Uwaga: Jeśli $f, g \in H(\Omega)$, Ω - otw spójny, $f = g$ na zbiorze E, E ma punkt skupienia w Ω, to $f = g$ na Ω.

Np. Jeśli $f, g \in H(\mathbb{C})$ i $f(\tfrac{1}{n}) = g(\tfrac{1}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $f = g$ (wszędzie)!



Spójność jest istotna:

$f=0$ $\qquad\qquad$ $f=1$

$g=0$ $\qquad\qquad$ $g=0$

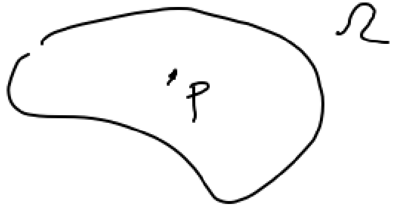
Istnieją funkcje $f \in H(\Omega)$, $f \not\equiv 0$ takie, że $Z(f) \subset \Omega$ ma punkty skupienia — ale poza Ω (tzn. w $\partial\Omega$).

Def. Jeśli $a \in \underset{\text{otw.}}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, to mówimy, że f ma osobliwość odosobnioną (izolowaną) w punkcie a.

Gdy f można określić w punkcie a tak, aby otrzymać funkcję $\in H(\Omega)$, to mówimy, że f ma w a osobliwość <u>pozorną</u>.

$f \in H(\Omega\setminus\{p\}) \cap C(\Omega)$, $p\in\Omega$

$f|_{\Omega\setminus\{p\}}$ ma osobliwość izolowaną w p, jest ona pozorna



Tw. Załóżmy, że $a\in\Omega$, $f\in H(\Omega\setminus\{a\})$. Załóżmy, że f jest ograniczona na pewnym dysku nakłutym $\underbrace{D'(a,r)}_{= D(a,r)\setminus\{a\}}$ (dla pewnego $r>0$), lub ogólniej, że

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0.$$

Wtedy f ma w a osobliwość pozorną.

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\sin z}{z}, & z\neq 0\\ 1, & z=0\end{cases}$$

$\pi\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

Dd: Połóżmy
$$h(z) = \begin{cases} 0 & , z = a \\ (z-a)^2 f(z) & , z \in \Omega \setminus \{a\} \end{cases}$$

Z założenia wynika, że
$$h'(a) = \lim_{z \to a} \frac{h(z) - h(a)}{z-a} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0 .$$

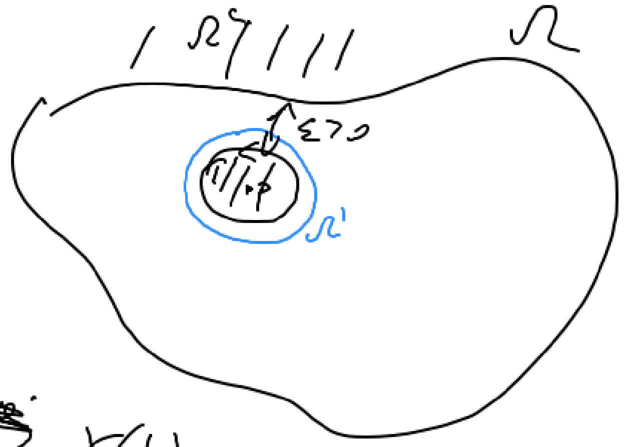
Ponieważ $h \in H(\Omega \setminus \{a\})$, więc $h \in H(\Omega)$, czyli
$$h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad (z \in D(a,r))$$

Jeśli przyjmiemy $f(a) = c_2$, to otrzymamy żądane rozszerzenie holomorficzne f, bo wtedy
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n \qquad (z \in D(a,r)) .$$

$\boxtimes$

Dalsze wnioski ze wzoru Cauchy'ego

Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(p,r)} \subset \Omega$, to istnieje $\rho > r$ t. że $\Omega' = D(p,\rho) \subset \Omega$; stosując wzór Cauchy'ego do funkcji $f\restriction_{D(p,\rho)}$ i drogi ~~[illegible]~~ $\gamma(t) = p + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$



otrzymujemy dla $z \in D(p,r)$:

$$\Big(\underbrace{\operatorname{Ind}_\gamma(z)}_{\overset{\shortparallel}{1}} f(z)\Big)^{(n)} = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw = \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(p+re^{it})}{\left[(p+re^{it}) - z\right]^{n+1}}\, r i e^{it}\,dt$$

biorąc $z = p$:

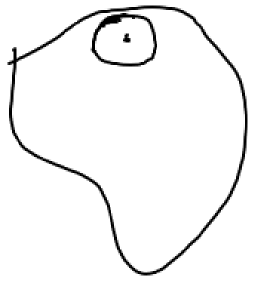
$$f(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p+re^{it})\,dt \quad \Leftarrow \text{tw. o wartości średniej}$$

$$f^{(n)}(p) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(p+re^{it})\, e^{-int}\,dt$$

Tw. (nierówności Cauchy'ego)

Jeśli $f \in H(D(a,R))$ oraz $|f| \le M$, to

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!\, M}{R^n}$$



D-d. Dla $r < R$:

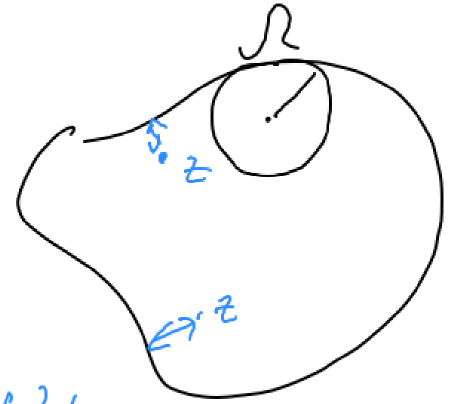
$$|f^{(n)}(p)| = \frac{n!}{2\pi r^n} \left| \int_0^{2\pi} f(p + re^{it})\, e^{-int}\, dt \right| \le$$

$$\le \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} M\, dt = \frac{M n!}{r^n}$$

tezę otrzymujemy po przejściu $r \to R^-$.

Wniosek. Jeśli $f \in H(\Omega)$ i $|f| \le M$, to

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!\, M}{\operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega)^n}, \quad z \in \Omega, \quad n = 1, 2, \ldots$$



$\operatorname{dist}(z, E) = \inf\{|w - z| : w \in E\}$

Def. Mówimy, że f jest całkowita, jeśli $f \in H(\mathbb{C})$.

Tw. (Liouville'a)
Ograniczone funkcje całkowite są stałe.

Dowód. Niech $f \in H(\mathbb{C})$; f rozwija się w szereg Maclaurina o nieskończonym promieniu zbieżności. Niech $|f| \le M$, dla $n = 1, 2, \ldots$ z nier. Cauchy'ego otrzymujemy

$$|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!\,M}{R^n} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Stąd wsp. w rozwinięciu Maclaurina (poza być może wyrazem wolnym) znikają. Stąd f jest stała. $\boxtimes$

Twierdzenie (zasadnicze tw. algebry)

Każdy wielomian zespolony stopnia ≥ 1 ma (przynajmniej jeden) pierwiastek.

Dowód. $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n > 0$;

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_n z^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \underbrace{\frac{1}{z}}_{\to 0} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \underbrace{\frac{1}{z^2}}_{\to 0} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \underbrace{\frac{1}{z^n}}_{\to 0}\right)} \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0.$$

Jeśli P nie miałby pierwiastków, to funkcja $\frac{1}{P}$ byłaby całkowita i ograniczona, więc z tw. Liouville'a byłaby stała, ~~wtedy P = const.~~, ↯.

ponieważ $\frac{1}{P(z)} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$, więc $\frac{1}{P} \equiv 0$

Zatem P musi mieć pierwiastek.

$\boxtimes$