Tw. Liouville'a:

Ograniczone $\underbrace{\text{f. całkowite}}_{f \in H(\mathbb{C})}$ są stałe

Tw. (o zerach)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty, spójny, $f \in H(\Omega)$. Wtedy $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ nie ma punktów skupienia w Ω, albo $f \equiv 0$ $(Z(f) = \Omega)$.

Jeśli $Z(f) \neq \Omega$, to $\forall a \in Z(f)$ $\exists m \in \mathbb{N}$ $\exists g \in H(\Omega)$ t. że

$$f(z) = (z-a)^m g(z), \quad z \in \Omega,$$

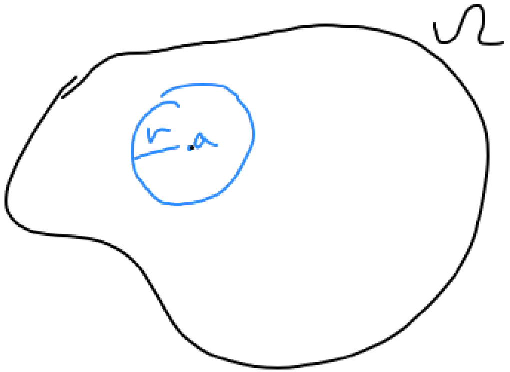
$g(a) \neq 0$.

Tw. (o maksimum modułu)

Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest otwarty i spójny, $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$,

to
$$|f(a)| \leq \max_{\vartheta \in [0, 2\pi]} |f(a + re^{i\vartheta})|,$$

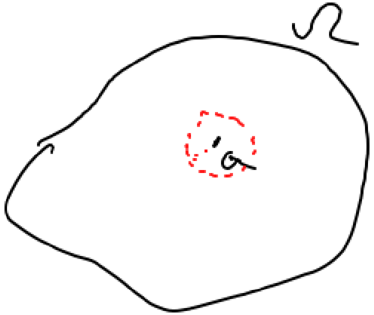
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją stałą.



Dowód później.

Tw. (Klasyfikacja osobliwości, tw. Casoratiego – Weierstrassa i Sochockiego)
1868 1876 1868

1859 Briot, Bouquet



Jeśli $a \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ otwarty, i $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$, to zachodzi jedna z trzech następujących możliwości:

(a) f ma osobliwość pozorną w punkcie a;

(b) istnieje liczba naturalna m i liczby zespolone $c_1, \dots, c_m$, $c_m \neq 0$ takie, że funkcja

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} c_k \frac{1}{(z-a)^k}$$

ma osobliwość pozorną w punkcie a;

(c) dla dowolnej liczby $r > 0$ takiej, że $D(a,r) \subset \Omega$ zbiór $f(\overbrace{D'(a,r)}^{D(a,r)\setminus\{a\}})$ jest gęsty w $\mathbb{C}$.

Uwaga

W przypadku (b) mówimy, że f ma w punkcie a biegun rzędu m.

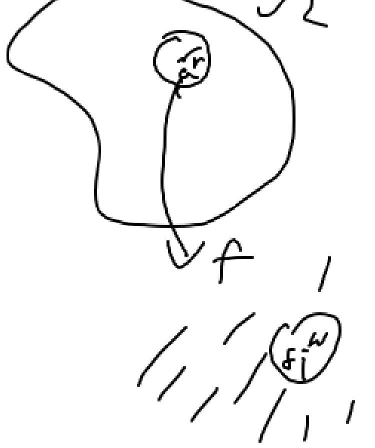
Funkcję
$$\sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k},$$
będącą wielomianem ze względu na $(z-a)^{-1}$, nazywamy częścią główną funkcji f w punkcie a. Zachodzi

$$f(z) = \underbrace{\Big(f(z) - \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k}\Big)}_{\xrightarrow{z\to a}\ w \in \mathbb{C}} + \underbrace{\underbrace{(z-a)^{-m}}_{\xrightarrow{z\to a}\ \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{m-k}}_{\xrightarrow{z\to a}\ c_m \neq 0}}_{\to\ \infty} \xrightarrow{z\to a} \infty$$

W przypadku (c) mówimy, że f ma w p. a osobliwość istotną.

Dwód. Załóżmy, że <u>nie</u> zachodzi przypadek (c). Istnieje więc $r>0$ takie, że $f(D'(a,r))$ <u>nie</u> jest gęsty w $\mathbb{C}$, a więc istnieje $D(w,\delta)\subset\mathbb{C}$ taki, że $\overline{D(w,\delta)}\cap f(D'(a,r))=\emptyset$, czyli

$$|f(z)-w|>\delta \qquad \text{dla} \quad z\in D'(a,r).$$



Dla uproszczenia notacji piszemy $D'=D'(a,r)$, $D=D(a,r)$.

Określmy funkcję g następująco

$$(*) \qquad g(z)=\frac{1}{f(z)-w} \qquad (z\in D').$$

Wtedy $g\in H(D')$ oraz $|g|<\frac{1}{\delta}$. Z tw. z poprzedniego wykładu g ma osobliwość pozorną w punkcie a, możemy więc g rozszerzyć do funkcji holomorficznej na D; to rozszerzenie dalej oznaczamy przez g.

- Jeśli $g(a) \neq 0$, to z równości $f(z) - w = \frac{1}{g(z)}$ $(z \in D')$ wynika, że f jest ograniczone w D', więc f ma osobliwość pozorną w a. Zachodzi więc przypadek (a).

- Jeśli $g(a) = 0$, to g ma w a zero izolowane $\left(g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \neq 0 \text{ dla } z \in D' \right)$, a więc istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $g_1 \in H(D)$ takie, że

$$g(a) = (z-a)^m g_1(z) \qquad (z \in D),$$

$g_1(a) \neq 0$. Ponieważ $g \neq 0$ na D', więc $g_1 \neq 0$ na D'. Zatem $g_1 \neq 0$ na D, więc $h = \frac{1}{g_1} \in H(D)$. Stąd

$$f(z) - w = \frac{1}{g(z)} = (z-a)^{-m} h(z) \qquad (z \in D')$$

Ale h rozwija się w szereg potęgowy wokół a, $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, $b_0 \neq 0$.

Dostajemy $(z \in D')$

$$f(z) - w = (z-a)^{-m} h(z) = (z-a)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1} b_n (z-a)^{n-m}}_{\parallel} + \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m}}_{\in H(D)}$$

$$\frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{z-a}$$

$$\left(f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} b_n (z-a)^{n-m} \right) = \underbrace{w + \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m}}_{\in H(D)} .$$

Zachodzi więc (b). $\left(c_k = b_{m-k} \right)$.

$\boxtimes$

Residua

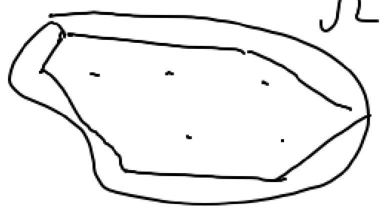
Def. Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, $a \in \Omega$, funkcja $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ ma biegun w a z częścią główną

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k},$$

to liczbę c_1 nazywamy residuum funkcji f w punkcie a i oznaczamy $\operatorname{res}(f, a) = c_1$.

Def. Funkcję f nazywamy meromorficzną w zbiorze otwartym Ω, jeśli istnieje zbiór $A \subset \Omega$ taki, że:

- A nie posiada punktów skupienia w Ω,
- $f \in H(\Omega \setminus A)$
- f ma biegun w każdym punkcie zbioru A.



Lemat Jeśli γ jest drogą zamkniętą w $\mathbb{C}$,

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k}$$ oraz $a \notin \gamma^*$, to

$$\int_\gamma Q(z)\,dz = 2\pi i\, c_1 \operatorname{Ind}_\gamma(a).$$

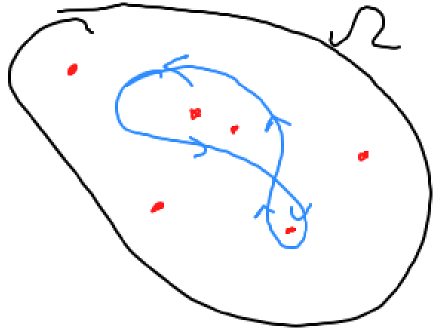
Dd.

$$\int_\gamma \frac{c_k}{(z-a)^k}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k>1 \quad \left(\text{bo } (z-a)^{-k} = \left(\frac{(z-a)^{-k+1}}{-k+1}\right)'\right) \\ c_1 \cdot 2\pi i \operatorname{Ind}_\gamma(a), & \text{gdy } k=1. \end{cases}$$

$\boxtimes$

Tw. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem gwiaździstym otwartym, f — funkcją meromorficzną w Ω ze skończonym zbiorem biegunów $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ oraz γ drogą zamkniętą w $\Omega\setminus A$, to

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}(f;a_k)\cdot \operatorname{Ind}_\gamma(a_k).$$



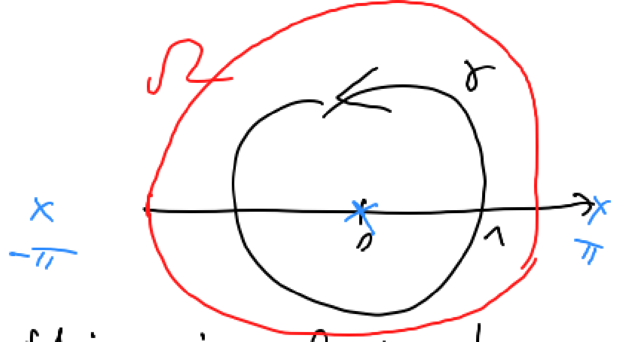
Dowód. Niech Q_k będzie częścią główną bieguna f w punkcie a_k $(k=1,\dots,n)$. Wówczas $f-(Q_1+Q_2+\dots+Q_n)$ ma w Ω tylko osobliwości usuwalne, więc z tw. Cauchy'ego:

$$0=\int_\gamma \big[f(z)-(Q_1(z)+\dots+Q_n(z))\big]\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\gamma (Q_1+\dots+Q_n)(z)\,dz =$$

$$= \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} 2\pi i\cdot \operatorname{res}(f;a_k)\operatorname{Ind}_\gamma(a_k).$$

$\boxtimes$

Przykład $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{\sin z}$



$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Rozważając $\Omega = D(0,2)$ widzimy, że $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ jest meromorficzna w Ω z biegunem w 0. (Bo $\frac{1}{\sin z} \xrightarrow[z\to 0]{} \infty$).

Policzmy:

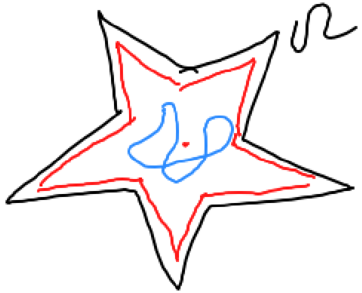
$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{z - \sin z}{z \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{z - \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{z^2} \frac{z}{\sin z} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}}{z^2} \frac{z}{\sin z} = \lim_{z\to 0} \underbrace{\left(-\sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)}_{\downarrow z\to 0 \atop 0} \underbrace{\frac{z}{\sin z}}_{\downarrow z \to 0 \atop 1} = 0$$

To oznacza, że $\frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z}$ ma w 0 osobliwość pozorną, a to z kolei oznacza, że $\frac{1}{z}$ jest częścią główną bieguna funkcji $\frac{1}{\sin z}$ w zerze. Zatem $\text{res}\left(\frac{1}{\sin}; 0\right) = 1$, wynika z poprzedniego twierdzenia

$$\int_\gamma \frac{1}{\sin z}\, dz = 2\pi i \cdot \text{res}\left(\frac{1}{\sin}, 0\right) \cdot \text{Ind}_\gamma(0) = 2\pi i .$$

Uwaga: W twierdzeniu założenie o skończoności A można pominąć: rozważając mniejszy zbiór gwiaździsty $\Omega' \subset \Omega$ taki, że $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ i $\overline{\Omega'}$ jest zwarty.



Obliczanie pewnych całek ze pomocą rachunku residuów

Tw. Jeśli funkcja meromorficzna ma w a biegun rzędu $\leq m$, to

$$\operatorname{res}(f; a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z) \right]$$

W szczególności, gdy $m=1$:

$$\operatorname{res}(f; a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Dd na ćwiczeniach

$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right)$

Pr. $\operatorname{res}\left(\frac{1}{\sin}; 0\right) = \lim_{z \to 0} z \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\sin'|_0} = \frac{1}{\cos 0} = 1$

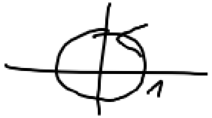
$\frac{1}{\sin}$ ma w 0 biegun rzędu 1, bo $\sin$ ma w 0 zero krotności 1 (ćw.)

Przykład Obliczmy, gdzie $a \in \mathbb{C}$, $|a|>1$ całkę

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t + a^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}+a^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i e^{it}\,dt}{ie^{it} - 2ai\frac{(e^{it})^2+1}{2} + a^2 i e^{it}} = \left\{ \cancel{z = e^{it}} \right\} ?$$

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

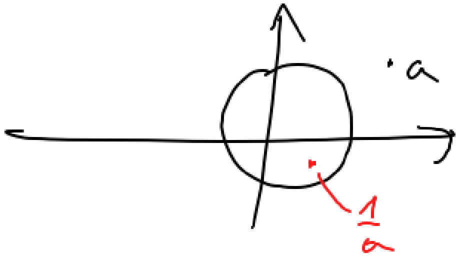


$$= \int_\gamma \frac{dz}{iz - \cancel{2}ai\frac{z^2+1}{\cancel{2}} + a^2 i z} =$$

$$g(z) = \frac{1}{z(1+a^2) - az^2 - a}$$

$$\left\{ \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, i e^{it}\, dt \right.$$

$$= \frac{1}{i}\int_\gamma \frac{dz}{z(1+a^2) - az^2 - a} = \frac{1}{i}\int_\gamma g(z)\,dz \overset{\text{tw.}}{=} \frac{1}{i} 2\pi i \cdot \sum_{a - \text{bieguny } g} \operatorname{res}(g, a) \cdot \operatorname{Ind}_\gamma(a)$$



$$g(z) = \frac{1}{z(1+a^2) - az^2 - a}$$

$$z(1+a^2) - az^2 - a = 0$$

$$\Delta = (1+a^2)^2 - 4a^2 = 1 + 2a^2 + a^4 - 4a^2 = (1-a^2)^2$$

pierwiastki:

$$z_1 = \frac{-(1+a^2)-(1-a^2)}{-2a} = \frac{1}{a} \quad \vee \quad z_2 = \frac{-(1+a^2)+(1-a^2)}{-2a} = a$$

$$g(z) = \frac{1}{-a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}$$ – ma bieguny w a i $\frac{1}{a}$ rzędu 1

$a \notin D(0,1)$, $\frac{1}{a} \in D(0,1)$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{i}\, 2\pi i \left(\operatorname{res}(g; a) \cdot \underbrace{\operatorname{Ind}_\gamma(a)}_{=\,0} + \operatorname{res}\left(g; \frac{1}{a}\right) \cdot \underbrace{\operatorname{Ind}_\gamma\left(\frac{1}{a}\right)}_{=\,1} \right) =$$

$$= 2\pi \lim_{z \to \frac{1}{a}} \left(z - \frac{1}{a}\right) g(z) =$$

$$= 2\pi \lim_{z \to \frac{1}{a}} \cancel{\left(z - \frac{1}{a}\right)} \frac{1}{-a(z-a)\cancel{\left(z - \frac{1}{a}\right)}} = 2\pi \frac{1}{-a\left(\frac{1}{a} - a\right)} =$$

$$= \boxed{2\pi \frac{1}{a^2 - 1}}\,.$$