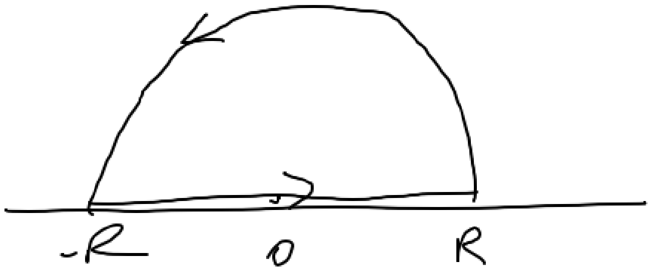
Przykład

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$$

Całka jest zbieżna, bo mianownik nie ma zer rzeczywistych i stopień mianownika $\geq$ stopień licznika $+2$.

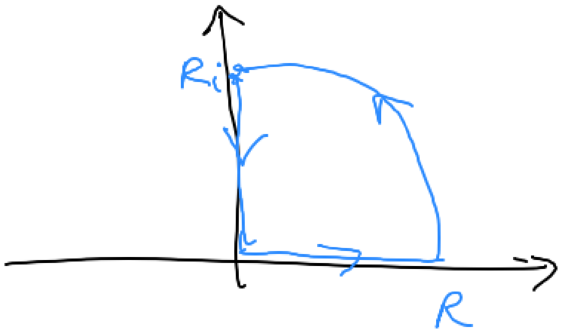
Metoda:

I całkujemy funkcję $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$



$$\rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \dots, \quad \int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

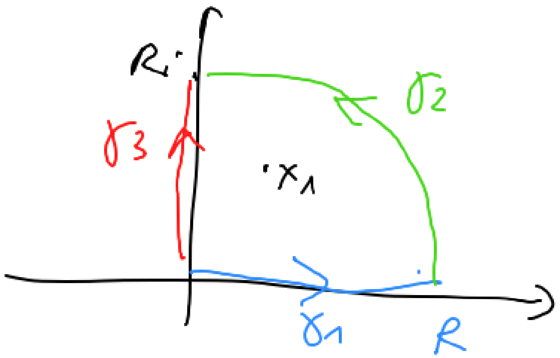
II całkujemy funkcję $f(x)=\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ wzdłuż



użyjemy tej metody

$\gamma_1 = \langle 0, R\rangle$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\gamma_3(t) = Rit$, $t \in [0,1]$

$\gamma_1(t) = Rt$, $t \in [0,1]$



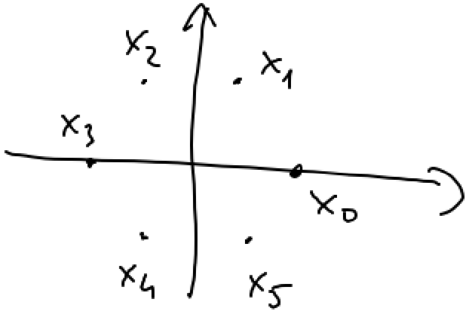
Znajdźmy zera mianownika: $x^4 + x^2 + 1 = 0 \quad / \cdot (x^2-1)$

$$(x^2-1)(x^4+x^2+1) = 0$$

$$x^6 - 1 = 0$$

zerami są pierwiastki szóstego stopnia z jedynki:

$$x_k = e^{\frac{2\pi i k}{6}}, \quad k = 0,1,2,3,4,5$$



pierwiastkami x^4+x^2+1 są

x_1, x_2, x_4, x_5

$$x_1 = e^{\frac{2\pi i}{6}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \underline{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Z tw. o residuach zachodzi, dla $R>1$: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3$

$$\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3}\right) f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{res}(f; x_1) \cdot \underbrace{\operatorname{ind}_\gamma(x_1)}_{=1}$$

$$\operatorname{res}(f; x_1) = \lim_{x\to x_1} (x-x_1)\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \lim_{x\to x_1} \frac{x^2}{\frac{x^4+x^2+1-\overbrace{(x_1^4+x_1^2+1)}^{=0}}{x-x_1}} = \frac{x_1^2}{(x^4+x^2+1)'\big|_{x=x_1}} =$$

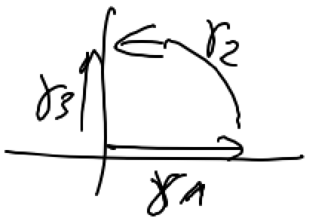
z dwiczeń, f ma w x_1 biegun rzędu 1

$$= \frac{x_1^2}{4x_1^3+2x_1} = \frac{x_2}{-4+2x_1} = \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-4+2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-3+i\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})} = \frac{+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}}{9+3} = \frac{-\sqrt{3}i+3}{12}.$$

$$\int_{\gamma_1} f(x)\,dx = \int_0^1 f(Rt)\,(Rt)'\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{(Rt)^2}{(Rt)^4+(Rt)^2+1}\, R\,dt = \left\{ \begin{matrix} u=Rt \\ du = R\,dt \end{matrix} \right\} = \int_0^R \frac{u^2}{u^4+u^2+1}\,du$$



$$\left\{ \begin{matrix} |w+z| \geq |w| - |z| \\ |w+z| + |z| \geq |w| \\ |w+z| + |-z| \geq \\ \geq |w+z-z| \end{matrix} \right.$$

$$\left|\int_{\gamma_2} f(x)\,dx\right| \leq \ell(\gamma_2)\cdot \sup_{x\in\gamma_2^*} |f(x)| = \frac{\pi}{2}R \cdot \sup_{x\in\gamma_2^*} \left|\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\right| =$$

dla dost. dużych R

$$= \frac{\pi}{2}R \sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} \left|\frac{(Re^{it})^2}{(Re^{it})^4+(Re^{it})^2+1}\right| \leq \frac{\pi}{2}R \sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]} \frac{R^2}{|(Re^{it})^4| - (|Re^{it}|^2+1)} =$$

$$= \frac{\pi}{2} R \cancel{\sup_{t\in[0,\frac{\pi}{2}]}} \frac{R^2}{R^4-R^2-1} = \frac{\pi}{2}\frac{R^3}{R^4-R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = \int_0^R \frac{(it)^2}{(it)^4+(it)^2+1}\,(it)'\,dt = i\int_0^R \frac{-t^2}{t^4-t^2+1}\,dt$$

$\gamma_3(t) = it, \quad t\in[0,R]$

$(R>1)$

$$\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}-\int_{\gamma_3}\right)\frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx = 2\pi i\,\frac{-\sqrt{3}i+3}{12}$$

$$\Big\downarrow R\to\infty$$

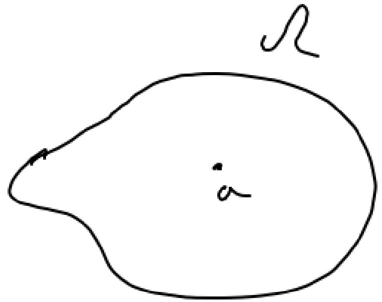
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^2+x+1}\,dx + 0 - i\int_0^\infty \frac{-x^2}{x^4-x^2+1}\,dx = 2\pi i\,\frac{-\sqrt{3}i+3}{12} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}+\frac{\pi}{2}i$$

Odp.: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^2+x+1}\,dx = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ (efekt uboczny: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{x^4-x^2+1} = \frac{\pi}{2}$).

Twierdzenie o odwzorowaniu otwartym

Lemat. Jeśli $f \in H(\Omega\setminus\{a\})$ ma biegun rzędu m w punkcie $a \in \Omega$, to $\frac{f'}{f}$ ma biegun rzędu 1 w a, oraz

$$\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -m.$$



Dowód. Zachodzi równość $f(z) = g(z)\cdot(z-a)^{-m}$ dla pewnej funkcji $g \in H(\Omega)$ takiej, że $g(a) \neq 0$.

Wówczas

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-a)^{-m} g'(z) - m(z-a)^{-m-1} g(z)}{(z-a)^{-m} g(z)} = \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\in H(D(a,r))} + \underbrace{\frac{-m}{z-a}}_{\text{część główna bieguna } \frac{f'}{f} \text{ w punkcie } a}$$

$D(a,r) \subset \Omega$ t.że $g \neq 0$ na $D(a,r)$

$\Rightarrow \frac{f'}{f}$ ma biegun rzędu 1 z residuum równym $-m$. ⊠

Lemat. Jeśli $f \in H(\Omega)$ ma zero krotności m w punkcie $a \in \Omega$, to $\frac{f'}{f}$ ma biegun rzędu 1 w a oraz $\operatorname{res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = m$.

Dd. Zachodzi $f(z) = g(z)(z-a)^m$ dla pewnej $g \in H(\Omega)$, $g(a) \neq 0$.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)(z-a)^m + m(z-a)^{m-1} g(z)}{g(z)(z-a)^m} = \underbrace{\frac{g'(z)}{g(z)}}_{\in H(D(a,r))} + \underbrace{\frac{m}{z-a}}_{\text{część główna bieguna } \frac{f'}{f}}$$

gdzie $D(a,r) \subset \Omega$ taki, że $g \neq 0$ na $D(a,r)$

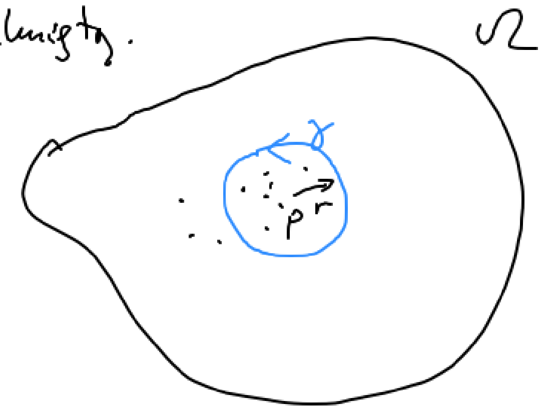
$\rightarrow$ $\frac{f'}{f}$ ma biegun rzędu 1 w a z residuum równym m.

$\boxtimes$

Tw. Niech $f\in H(\Omega)$, $\overline{D(p,r)}\subset\Omega$, $\gamma(t)=p+re^{it}$, $t\in[0,2\pi]$.

Niech $\Gamma(t)=f(\gamma(t))$; Γ też jest drogą zamkniętą.

Jeśli $w\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^*$, to $\mathrm{Ind}_\Gamma(w)$ jest liczbą zer funkcji $f-w$ w $D=D(p,r)$ (liczonych wraz z krotnościami).



Dd. Niech $a_1,a_2,\dots,a_k$ będą zerami funkcji $f-w$ w dysku D oraz niech N będzie liczbą tych zer, liczonych wraz z krotnościami. Wówczas

$$N=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{res}\left(\frac{(f-w)'}{f-w},a_j\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(f-w)'(z)}{(f-w)(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt}{f(\gamma(t))-w}=$$

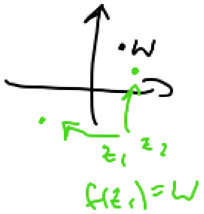
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)-w}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{1}{z-w}\,dz=\mathrm{Ind}_\Gamma(w).$$

$\boxtimes$

Przykład

$\Omega = \mathbb{C}$

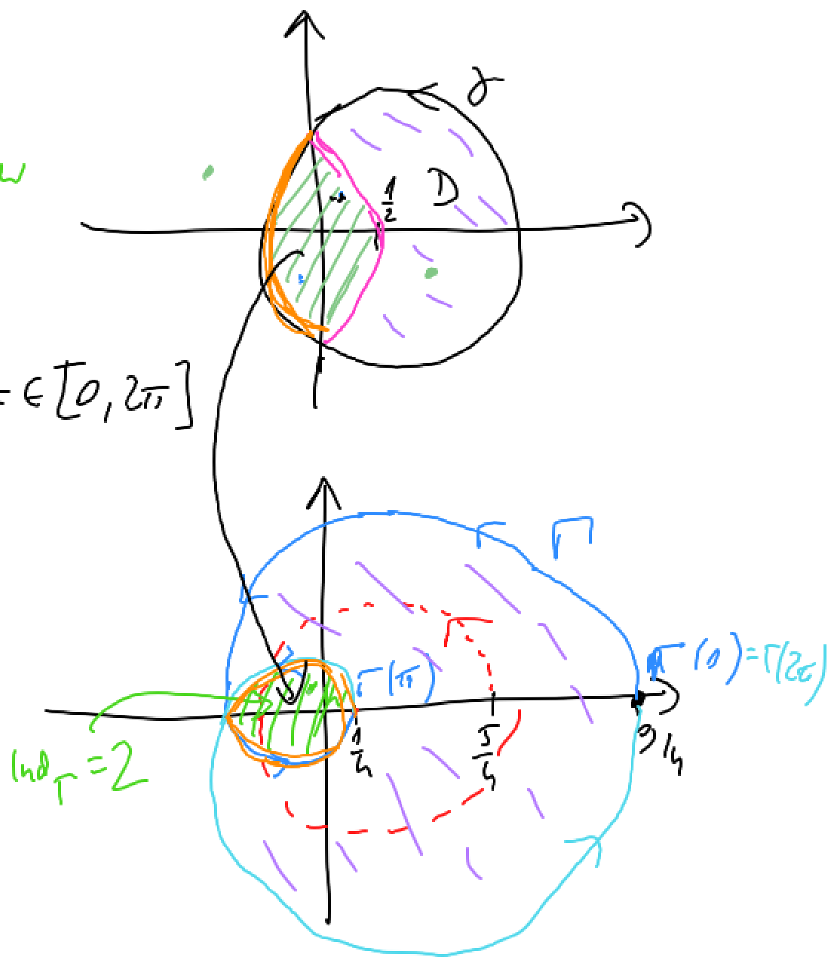
$f(z) = z^2$, $D = D(p, r) = D(\tfrac{1}{2}, 1)$,



$\gamma(t) = \tfrac{1}{2} + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\Gamma(t) = f(\gamma(t)) = \left(\tfrac{1}{2} + e^{it}\right)^2 = \underbrace{\tfrac{1}{4} + e^{it}} + e^{2it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

$\mathrm{Ind}_\Gamma(w) = \Big($liczba zer $f - w$ w D
licząc krotności$\Big)$

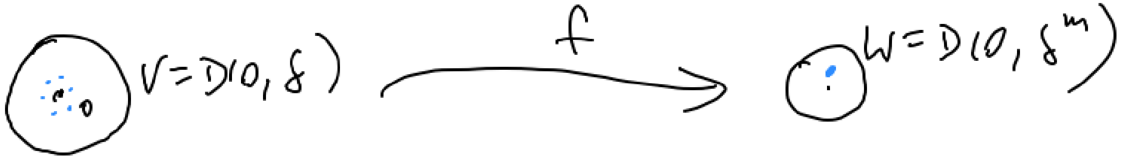


Tw.

Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zb. otwartym i spójnym, $f \in H(\Omega)$, $f \neq$ const, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ i niech m będzie krotnością zera funkcji $(f - w_0)$ w punkcie z_0.
Wówczas istnieją zbiory otwarte V oraz W t.że

- $z_0 \in V \subset \Omega$
- $W = f(V)$
- $\forall w \in W \setminus \{w_0\}$ istnieje dokładnie m różnych punktów $z \in V$ takich, że $f(z) = w$.

$f(z) = z^m$ ma w $\overset{z_0}{0}$ zero $\overset{w_0=0}{}$ krotności m

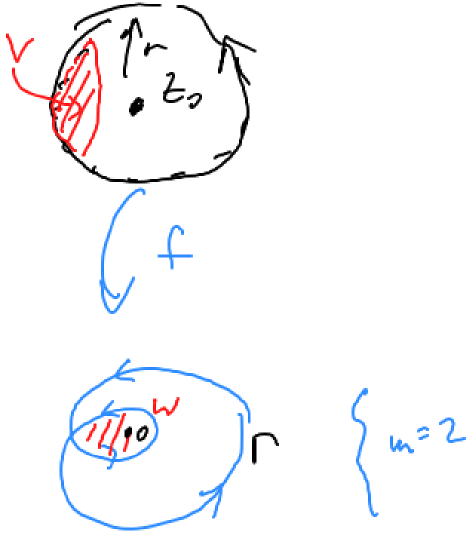


D-d. Bez straty ogólności możemy założyć, że $w_0 = 0$.

Ponieważ $f \neq$ const., więc $f' \not\equiv 0$, żaden ani $Z(f)$, ani $Z(f')$ nie mają punktów skupienia w Ω. Zatem istnieje $r > 0$ takie, że ani f, ani f' nie mają zer na $\overline{D(z_0, r)} \setminus \{z_0\}$.

Niech $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$\Gamma = f \circ \gamma$ $\quad \Gamma(t) = f(\gamma(t))$.



Weźmy $0 \notin \Gamma^*$. Niech W będzie składową spójną zbioru $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$ zawierającą 0, $V = D(z_0, r) \cap f^{-1}(W)$.

- V jest zbiorem otwartym
- z popr. tw. wynika, że $\operatorname{Ind}_\Gamma(0) = m$. Z własności indeksu

$m = \operatorname{Ind}_\Gamma(w) =$ liczba zer $(f - w)$ w D, dla $w \in W$

Ale $(f-w)' = f' \neq 0$ na $V \setminus \{z_0\}$, więc wszystkie zera $(f-w)$, dla $w \in W \setminus \{0\}$, są jednokrotne.

$\boxtimes$