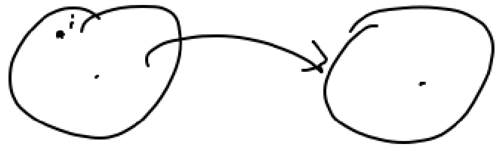
Cy ismégje $f \in H(\mathbb{D}(0,1))$ tube, ie

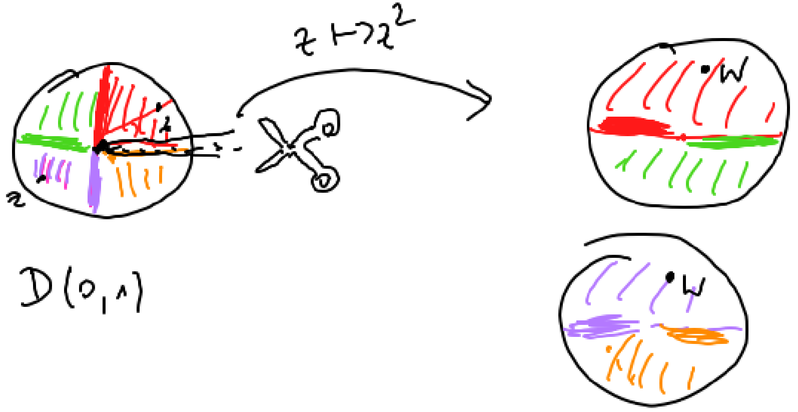
$$f(D(0,1)) = D(0,1)$$



om

$$|f(z)| < |z| \quad \text{ha} \quad z \neq 0$$
$$(z \in D(0,1))$$

TAU, mp. $f(z) = z^2$ $\quad f'(0) = 0$



Tw. (przypomnienie)

$\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, $f \in H(\Omega)$, $f \neq \text{const.}$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, m = krotność zera funkcji $f - w_0$ w punkcie z_0. Wówczas istnieją zbiory otwarte V oraz W takie, że:

1) $z_0 \in V \subset \Omega$
2) $W = f(V)$
3) $\forall_{w \in W \setminus \{w_0\}}$ istnieje dokładnie m różnych punktów $z \in V$ takich, że $f(z) = w$

(dla $w = w_0$ istnieje dokł. jeden punkt $z \in V$: $f(z) = w_0$ i jest to z_0)

Wnioski:

Tw. (o odwzorowaniu otwartym) Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ – obszar, to $f = \text{const.}$ lub f jest odwzorowaniem otwartym, tzn. obrazy zb. otwartych są otwarte.

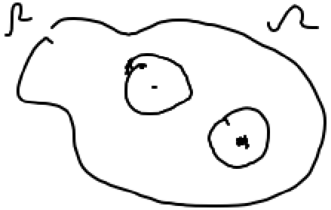
Dow. Jeśli $f \neq \text{const.}$, niech $G \subset \Omega$ będzie otwarty. Wybierzmy $z_0 \in G$ i niech $\tilde{\Omega}$ będzie składową spójną zbioru G zawierającą z_0. Znajdujemy zbiory V, W jak w tw. dla $\tilde{\Omega}$.

Wtedy $f(z_0) \in W = f(V) \subset f(\tilde{\Omega}) \subset f(G)$. To znaczy, że $f(G)$ jest otw. $\boxtimes$

Tw. (zasada maksimum modułu)

Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ - obszar oraz $|f|$ ma lokalne maksimum w Ω, (w ścisłym sensie)
to $f = \text{const}$.

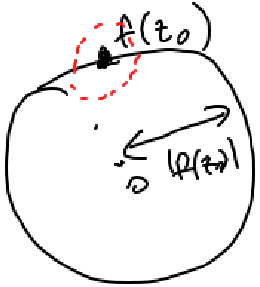
Dd. Zmniejszając Ω możemy założyć, że maksimum w $z_0 \in \Omega$ $|f|$ jest globalne. Jeśli $f \neq \text{const.}$, to $f(\Omega)$ jest



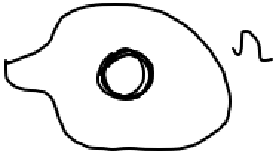
otwarty, ale z drugiej strony, jeśli $|f(z)| \le |f(z_0)|$ dla $z \in \Omega$,

to $$f(\Omega) \subset \overline{D(0, |f(z_0)|)}$$

ale $f(z_0) \in f(\Omega)$. Sprzeczność z otwartością $f(\Omega)$.



∎



Tw. (o odwzorowaniu odwrotnym)

Jeśli $f \in H(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}$ - obszar oraz f jest różnowartościowa, to $f' \neq 0$ na Ω, funkcja odwrotna $f^{-1} \in H(f(\Omega))$ oraz $(f^{-1})'(w) = \dfrac{1}{f'(z)}$, gdzie $f(z) = w$.

D-d.

Gdyby $f'(z_0) = 0$ dla pewnego $z_0 \in \Omega$ ($w_0 = f(z_0)$), to z poprzedniego twierdzenia otrzymalibyśmy zbiory V, W takie, że $\forall\, w \in W \setminus \{w_0\}$ istnieje dokł. m różnych punktów $z \in V$: $f(z) = w$;
m = krotność zera $f - w_0$ w punkcie z_0.

$$(f - w_0)(z_0) = 0$$
$$(f - w)'(z_0) = f'(z_0) = 0 \implies m \geq 2$$

↯ z różnowartościowością. Zatem $f' \neq 0$ na Ω.

$$\Omega \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(\Omega)$$

f^{-1} istnieje.

Niech $w_1 \in f(\Omega)$, $w \in f(\Omega)$, $w \neq w_1$; niech $f(z)=w$, $f(z_1)=w_1$ (z, z_1 są określone jednoznacznie)

$g := f^{-1}$ $\qquad z, z_1 \in \Omega$

$$\frac{g(w)-g(w_1)}{w-w_1} = \frac{z-z_1}{f(z)-f(z_1)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}}$$

Jeśli $w \to w_1$, to $\underset{z}{\underset{\parallel}{g(w)}} \to \underset{z_1}{\underset{\parallel}{g(w_1)}}$ (bo f jest odwzorowaniem otwartym, czyli przeciwobrazy $g^{-1}(W)$ są otwarte dla $W \subset \Omega$ otwartych, a to oznacza, że g jest ciągła),

czyli

$$\lim_{w \to w_1} \frac{g(w)-g(w_1)}{w-w_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}} = \frac{1}{f'(z_1)}.$$

To oznacza, że $g'(w_1)$ istnieje i $= \frac{1}{f'(z_1)}$.

⊠

Tw. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}$ będzie zbiorem otwartym, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$. Wówczas istnieją otoczenia $\Omega \supset V \ni z_0$, $W \ni w_0$ takie, że f jest różnowartościowym odwzorowaniem V na W. Ponadto jeśli $g = (f\restriction_V)^{-1}$, to $g \in H(W)$.

Dowód. Zmniejszając zbiór Ω można założyć, że Ω jest spójny.

$(f - w_0)$ ma w z_0 zero krotności 1, więc z poprzedniego tw. istnieją zb. otwarte $V \ni z_0$, $W \ni w_0$, $V \subset \Omega$ takie, że $W = f(V)$ oraz

$\forall w \in W \setminus \{w_0\}$ f przyjmuje wartość w w dokł. jednym punkcie ze zbioru V.

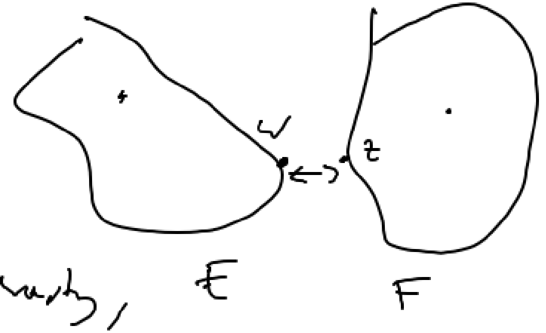
Zatem f jest $1-1$ na V.

Przykład

przypomnienie: $\operatorname{dist}(z,E) = \inf\limits_{w\in E} |z-w|$ ← $(\operatorname{dist}(\cdot,E)$ jest ciągła na $\mathbb{C})$

$(E\subset\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C})$

$$\operatorname{dist}(E,F) = \inf_{\substack{w\in E\\ z\in F}} |z-w|$$



· Funkcja $\operatorname{dist}(\cdot,E)$ jest ciągła na $\mathbb{C}$.

Lemat. Jeśli $F\subset\mathbb{C}$ jest domknięty, a $K\subset\mathbb{C}$ zwarty, to $\operatorname{dist}(F,K)>0$, o ile $F\cap K=\emptyset$.

(założenie, że K jest zwarty nie można zastąpić tym, że K jest domknięty)

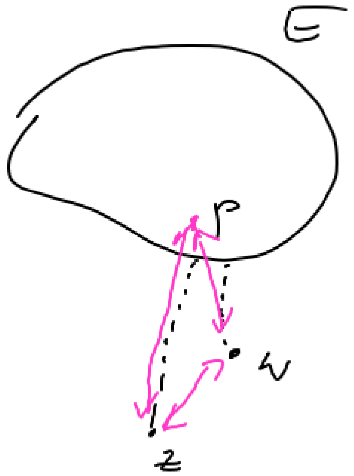
D-d. Niech $z, w \in \mathbb{C}$ będą takie, że $\operatorname{dist}(z,E) \geq \operatorname{dist}(w,E)$

$$|\operatorname{dist}(z,E) - \operatorname{dist}(w,E)| = \operatorname{dist}(z,E) - \operatorname{dist}(w,E) =$$

$$= \inf_{p\in E} |z-p| - \operatorname{dist}(w,E) \leq$$

$$\leq \inf_{p\in E} \left(|z-w| + |w-p| \right) - \operatorname{dist}(w,E) =$$

$$= |z-w| + \underbrace{\inf_{p\in E} |w-p|}_{\operatorname{dist}(w,E)} - \operatorname{dist}(w,E) = |z-w|$$



Z symetrii dostajemy $|\operatorname{dist}(z,E) - \operatorname{dist}(w,E)| \leq |z-w|$ dla dowolnych $z, w \in \mathbb{C}$.

Stąd $\operatorname{dist}(\cdot, E)$ jest ciągła na $\mathbb{C}$.

- Wiemy, że $\operatorname{dist}(z, F) > 0$ dla $z \notin F$.

- Niech $h(z) = \operatorname{dist}(z, F)$, pokazaliśmy, że jest ona ciągła i ściśle dodatnia na $\mathbb{C} \setminus F$,

czyli $h > 0$ na K. Wobec tego $h(K)$ jest zwartym podzbiorem $(0, \infty) = \bigcup_{t>0} (t, \infty)$, możemy wybrać z tego pokrycia podpokrycie skończone:

$$h(K) = \bigcup_{k=1}^{n} (t_k, \infty) = (t_1, \infty).$$ dla pewnych $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \infty$

To znaczy, że $h(z) \geq t_1$ dla $z \in K$.

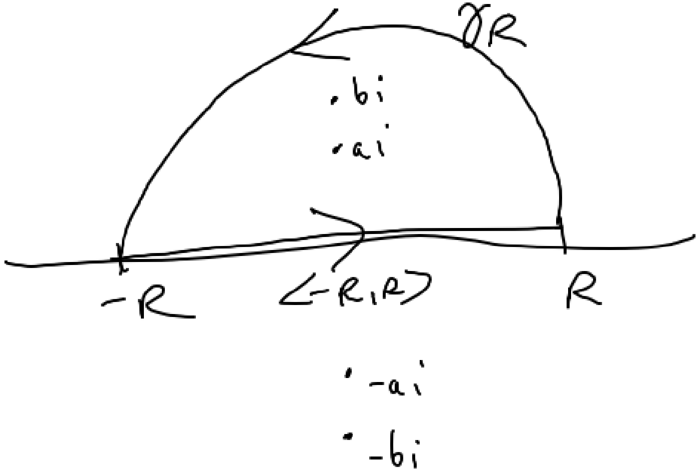
Stąd $\operatorname{dist}(K, F) = \inf_{z \in K} \inf_{w \in F} |w - z| = \inf_{z \in K} \operatorname{dist}(z, F) = \inf_{z \in K} h(z) \geq t_1 > 0$.

$\boxtimes$

• Obliczymy, początkowo dla $a,b>0$, $a\neq b$ całkę (korzystamy z tego, że $a^2, b^2 > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(e^{ix})\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}_{f(x)}$$

Rozważmy kontur $\gamma = \langle -R,R\rangle + \gamma_R$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi]$



Z tw. o residuach:

$$I := \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{res}(f,ai) + \mathrm{res}(f,bi)\right),$$

dla $R > \max(a,b)$

Bieguny f są w $\pm ai$, $\pm bi$ i są one rzędu 1.

$$\operatorname{res}(f, ai) = \lim_{x \to ai} (x-ai) f(x) = \lim_{x \to ai} \frac{e^{ix} \cancel{(x-ai)}}{\cancel{(x-ai)}(x+ai)(x^2+b^2)} = \frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)}$$

przez symetrię

$$\operatorname{res}(f, bi) = \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi i \left(\frac{e^{-a}}{2ai(b^2-a^2)} + \frac{e^{-b}}{2bi(a^2-b^2)} \right) = \pi \frac{\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}}{b^2-a^2} = \pi \frac{be^{-a} - ae^{-b}}{ab(b^2-a^2)}$$

Z drugiej strony,

$$\int_{\langle -R, R \rangle} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz \xrightarrow[R \to \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\,dz$$

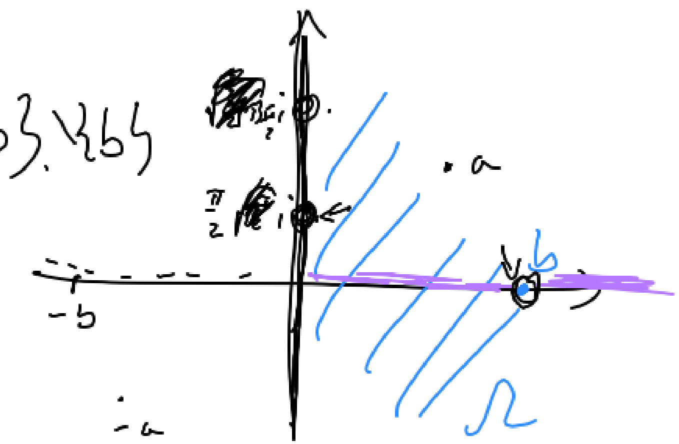
$\gamma(t) = t, \ t \in [-R, R]$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \longrightarrow 0 \quad \text{przy } R \to \infty$$ (lemat Jordana :62)

$$g(a) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right) =: h(a) \quad \text{dla } \begin{matrix} a,b>0. \\ a\neq b \end{matrix}$$

Ustalmy $b>0$.

A co gdy a nie jest dodatnie?



Sensownie jest rozważać $a \in \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{b\}$

Zauważmy, że funkcja

$$a \longmapsto \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right)$$

jest holomorficzna na Ω.

Sprawdzimy później, że funkcja $a \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ jest holomorficzna na Ω.

Zatem $g, h \in H(\Omega)$ oraz $g(z) = h(z)$ dla $z \in \Omega$ t.że $\operatorname{Im} z = 0$

Stąd z tw. o zerach $g(a) = h(a)$ dla wszystkich $a \in \Omega$.