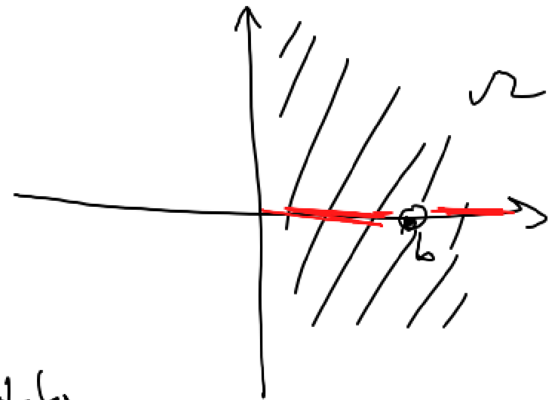
$$h(a) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right) \quad (*) \qquad , a,b>0, \ a \neq b$$

Ustalmy $b>0$.

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{b\}$$

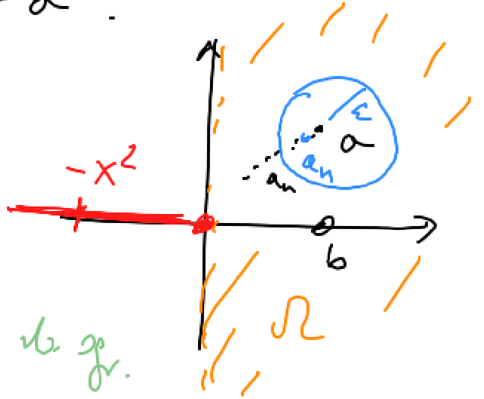


Jeśli pokażemy, że $h \in H(\Omega)$, to ponieważ prawa strona $(*)$ też jest holomorficzna na Ω, jako funkcja zmiennej a, to z równości $(*)$, która zachodzi dla $a>0, a \neq b$ i z tw. o zerach, $(*)$ zachodzi też dla $a \in \Omega$.

Teraz pokażemy, że $h \in H(\Omega)$, korzystając z tw. Morery.

1) sprawdzimy, że h jest ciągła na Ω

Ustalmy $a \in \Omega$ i niech $a_n \to a$, $a_n \in \Omega$, $a_n \neq a$.



Cel: $\lim_{n\to\infty} h(a_n) = h(a)$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie t. że $\overline{D(a,\varepsilon)} \subset \Omega$. Od pewnego miejsca $a_n \in D(a,\varepsilon)$.

tw. Lebesgue'a o zb. gr.

$$\lim_{n\to\infty} h(a_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2+a_n^2)(x^2+b^2)} \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a_n^2)(x^2+b^2)} dx = h(a)$$

(lemat)

$$|x^2+a_n^2| = |\underbrace{a_n^2}_{\in f(\overline{D(a,\varepsilon)})} - \underbrace{(-x^2)}_{\in(-\infty,0]}| \geq \operatorname{dist}\left(f(\overline{D(a,\varepsilon)}), (-\infty,0]\right) =: m > 0$$

, dla n dost. dużych ($a_n \in \overline{D(a,\varepsilon)}$)

$f(z) = z^2$

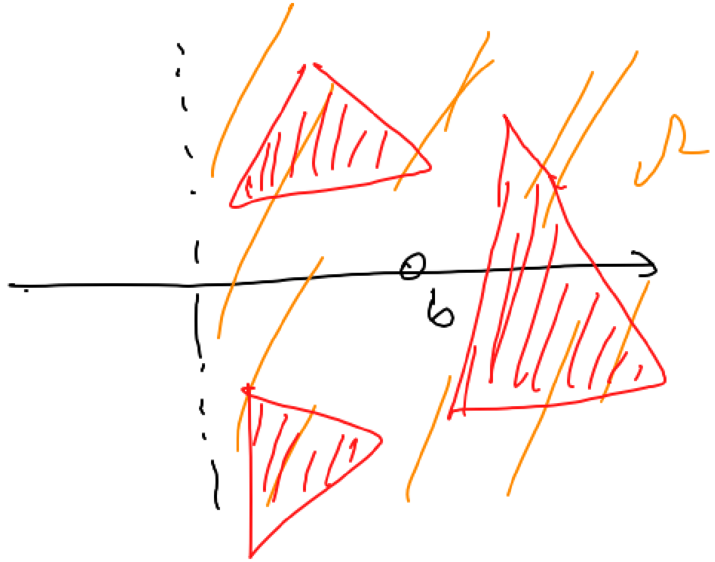
$$f(\overline{D(a,\varepsilon)}) \subset f(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

rozłączne, $f(\overline{D(a,\varepsilon)})$ – zwarty, $(-\infty,0]$ – domknięty

$$\left|\frac{\cos x}{(x^2+a_n^2)(x^2+b^2)}\right| \leq \underbrace{\frac{1}{m(x^2+b^2)}}_{\text{majoranta całkowalna na } \mathbb{R}}$$

2) jeśli trójkąt $\Delta \subset \Omega$, to

$$\int_{\partial\Delta} h(a) \overset{?}{=} 0.$$



Weźmy trójkąt $\Delta \subset \Omega$.

$$\int_{\partial\Delta} h(a)\, da = \int_{\partial\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx\, da \underset{\text{Fubini}}{\overset{?}{=}}$$

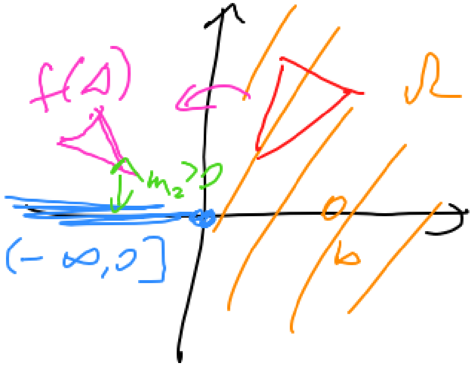
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\partial\Delta} \boxed{\frac{\cos x}{(x^2+a^2)\,(x^2+b^2)}}\, da \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 0\, dx = 0.$$

jako funkcja zmiennej a, jest to funkcja $\in H(\Omega)$ (nawet $\in H(\mathbb{C} \setminus \{-x_i, x_i\})$)

tw. Cauchy'ego dla trójkątów

Potrzebujemy spr. bezwzględnej całkowalności:

$$\int_{\partial\Delta}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\right| dx\ |da| < \infty$$



$$\begin{cases} \int_\gamma f(w)\,dw = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt, \quad \gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C} \\ \int_\gamma |f(w)|\,|dw| = \int_\alpha^\beta |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \end{cases}$$

(lemat)

$$|x^2+a^2| = |\underset{\substack{\Uparrow \\ f(\Delta)}}{a^2} - \underbrace{(-x^2)}_{\in(-\infty,0]}| \geq \operatorname{dist}\left(f(\Delta), (-\infty,0]\right) =: m_2 > 0$$

$f(z)=z^2$

$$f(\Delta) \subset f(\Omega) \subset \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$$

zwarty   domknięty   – rozłączne

$$\int_{\partial\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} \right| dx \, |da| \leq \int_{\partial\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m_2 (x^2+b^2)} dx \, |da| =$$

$$= \frac{1}{m_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+b^2} \cdot \ell(\partial\Delta) < \infty$$

Twierdzenie (Rouché)

Jeśli $f, g \in H(\Omega)$, $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ oraz

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{dla} \quad |z-a| = r$$

to f, g mają tę samą liczbę zer w $D(a,r)$ (licząc z krotnościami).

Uwaga: Z założeń wynika, że $f, g \neq 0$ na $\partial D(a,r)$.

- Zadanie 57 z Ławinej:

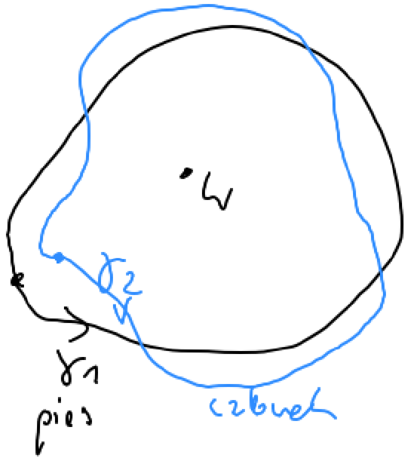
$\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$

$\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$

$\gamma_2(0) = \gamma_2(1)$

$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |w - \gamma_2(t)|$, $t \in [0,1]$

$\Rightarrow \quad \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(w) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(w)$



Dowód twierdzenia R :

Niech $Z(f), Z(g)$ - liczba zer funkcji (odpowiednio) f, g w $D(a,r)$ (licząc krotności)

$\gamma(t) = a + re^{it \cdot 2\pi}$, $t \in [0,1]$

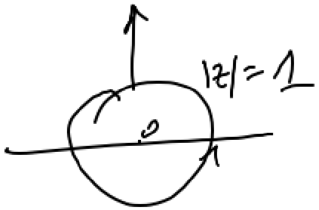
Na mocy jednego z poprzednich twierdzeń $Z(f) = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0)$, $Z(g) = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$

Z założenia: $|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |0 - f(\gamma(t))|$, $t \in [0,1]$

z zadania z ćw.: $\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma}(0)$, czyli $Z(f) = Z(g)$. $\boxtimes$

Przykład

$$f(z) = z^4 - 5z + 1$$



Ile zer ma f w $D(0,1)$?

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \text{dla } |z|=1$$

Weźmy $g(z) = -5z$

$$|f(z) - g(z)| = |z^4 - 5z + 1 - (-5z)| = |z^4 + 1| \le |z|^4 + 1 = 2 \quad \text{dla } \underline{|z|=1}$$

$$|g(z)| = |-5z| = 5 \quad \text{dla } |z| = 1$$

czyli: $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ dla $\underline{|z|=1}$

Z tw. Rouché: f, g mają tyle samo zer w $D(0,1)$, czyli jedno

A ile ma zer w $D(0,2)$?

$$f(z) = z^4 - 5z + 1$$

$$g_2(z) = z^4$$

$|z| = 2$

$$|f(z) - g_2(z)| = |-5z+1| \leq 5|z| + 1 = 11 < 16 = |z^4| = |g_2(z)|$$

Z tw. Rouché: f, g_2 mają po tyle samo zer w $D(0,2)$, czyli po cztery.

Tu ostatnia część nie wymaga tw. Rouché:

$$|f(z)| = |z^4 - 5z + 1| \geq |z^4| - 5|z| - 1 > 0 \ (?)$$

dla $|z| \geq 2$

więc wielomian f nie ma zer na $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,2)}$, musi mieć więc 4 zera w $D(0,2)$

Zbieżność niemal jednostajna

$\Omega \subset \mathbb{C}$ niech będzie zbiorem otwartym

Piszemy $K \subset\subset \Omega$, jeśli $K \subset \Omega$ i K jest zbiorem zwartym.

Def. Mówimy, że $f_n \in C(\Omega)$ zbiegają <u>niemal jednostajnie</u> (nj.) do funkcji $f \in C(\Omega)$, jeśli

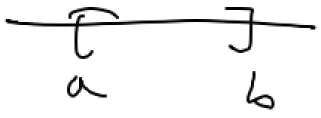
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_K = 0$$

dla każdego $K \subset\subset \Omega$.

Przypomnienie: $\|g\|_K = \sup_{z \in K} |g(z)|$

Tw Jeśli $f_n \in H(\Omega)$ oraz $f_n \to f$ nj. w Ω, to $f \in H(\Omega)$

Dd. (na ćwiczeniach).

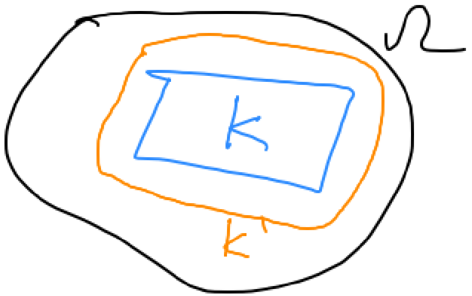


Lemat

Niech $K \subset\subset \Omega$, $j \in \mathbb{N}$.

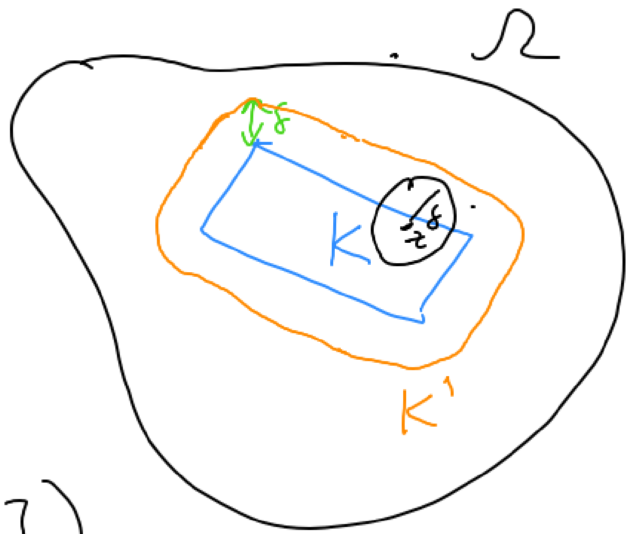
Wówczas istnieją stała c i zbiór $K' \subset\subset \Omega$, takie że dla dowolnej funkcji $f \in H(\Omega)$ zachodzi

$$\|f^{(j)}\|_K \le c\|f\|_{K'}$$



Dd. Niech $\delta = \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)/2 > 0$

(Możemy wziąć jakiekolwiek $\delta > 0$ w przypadku $\Omega = \mathbb{C}$).



Przyjmujemy

$$K' = \bigcup_{z \in K} \overline{D(z,\delta)} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{dist}(z,K) \le \delta\} =$$

$$= \operatorname{dist}(\cdot, K)^{-1}([0,\delta])$$

ponieważ $\operatorname{dist}(\cdot, K)$ jest ciągła, więc K' jest domknięty

K jest ograniczony, tzn. $K \subset \overline{D(0,R)}$, więc też $K' \subset \overline{D(0,R+\delta)}$

Zatem K' jest zwarty.

Ponadto z określenia δ wynika, że $K' \subset \Omega$.

Stosujemy nierówności Cauchy'ego dla f, dysku $D(z,\delta)$:

$$|f^{(j)}(z)| \le \frac{j!}{\delta^j} \|f\|_{D(z,\delta)} \le \frac{j!}{\delta^j} \|f\|_{K'}, \quad z \in K$$

$$\|f^{(j)}\|_K \le \underbrace{\frac{j!}{\delta^j}}_{= C} \|f\|_{K'}.$$

$\boxtimes$

Tw. Załóżmy, że $f_n \in H(\Omega)$ zbiegają nj. do f w Ω. Wówczas dla dowolnego $k = 1, 2, \dots$:

$$f_n^{(k)} \longrightarrow f^{(k)} \quad \text{nj. w } \Omega.$$

Dowód: Niech $K \subset\subset \Omega$. Dobierzmy $K' \subset\subset \Omega$ i c jak w lemacie.

$$\| f_n^{(k)} - f^{(k)} \|_K \le c \, \| f_n - f \|_{K'} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

z założenia, że $f_n \to f$ nj. w Ω.

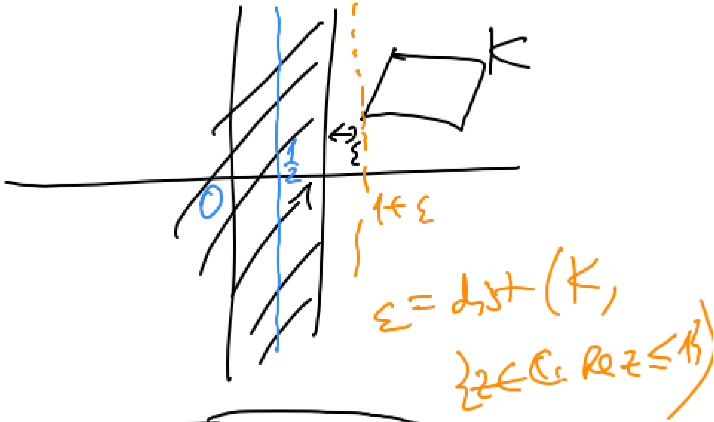
$\boxtimes$

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\exp(z \cdot \ln n)}$$

jest zb. jednostajnie na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1+\varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.

Jeśli $K \subset\subset \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$, to dla pewnego $\varepsilon > 0$

$K \subset \{z \in \mathbb{C} : z \geq 1+\varepsilon\}$.



Zatem $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ jest zbieżny nj. na Ω.

Zatem $\zeta \in H(\Omega)$.

ζ można rozszerzyć do funkcji $\in H(\mathbb{C} \setminus \{1\})$.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$