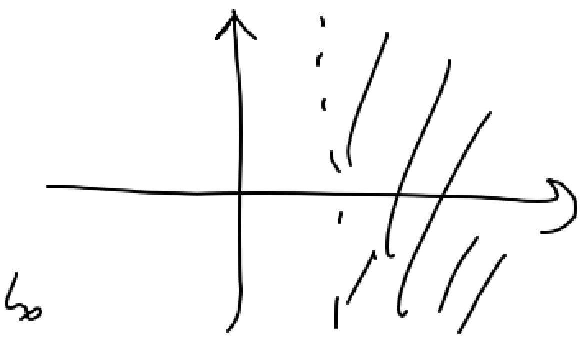
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \operatorname{Re} z > 1$$



$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{e^{z \ln n}} = \exp(-z \cdot \ln n)$$ — całkowita jako funkcja zmiennej z

$\Omega = \{z : z > 1\}$

$\zeta \in H(\Omega)$ z tw. o zbieżności nj.

$$\zeta'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^z} \cdot (-\ln n)}$$

twierdzenie z poprz. wykładu

ten szereg zbiega nj. w Ω do ζ'

Przykład

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}}_{\text{ma pozorną osobliwość w zerze}} dx$$

Nie można by napisać

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\,dx\,,$$

bo ta całka nie jest zbieżna!

$\gamma_R(t) = Re^{it},\ t\in[0,\pi]$

Funkcja podcałkowa $f(x) = \dfrac{e^{ix}-1}{x(x^2+1)}$ jest meromorficzna na $\mathbb{C}$
z biegunami w $\pm i$ (w zerze jest osobliwość pozorna)

$$\int_{\langle -R,R\rangle} f(x)\,dx + \int_{\gamma_R} f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{res}(f,i) \qquad (\text{jeśli } R>1)$$

$$\int_{\gamma_R} f(x)\,dx = \int_{\gamma_R} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\,dx - \int_{\gamma_R} \frac{dx}{x(x^2+1)} \xrightarrow[\text{lemat Jordana}]{} 0 + 0$$

+ oszacowanie przez sup/długość drogi

$$f(x) = \frac{e^{ix} - 1}{x(x^2+1)}$$

w i jest biegun rzędu 1

$$\operatorname{res}(f, i) = \lim_{x \to i} (x-i) f(x) = \lim_{x \to i} \frac{\cancel{(x-i)}(e^{ix} - 1)}{x\cancel{(x-i)}(x+i)} = \frac{e^{-1} - 1}{i \cdot 2i} = \frac{\frac{1}{e} - 1}{-2} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{e}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \left(\int_{\langle -R, R \rangle} + \int_{\gamma_R} \right) f(x)\,dx = 2\pi i \operatorname{res}(f, i) = \pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right)\right) = \frac{\pi\left(1 - \frac{1}{e}\right)}{2}$$

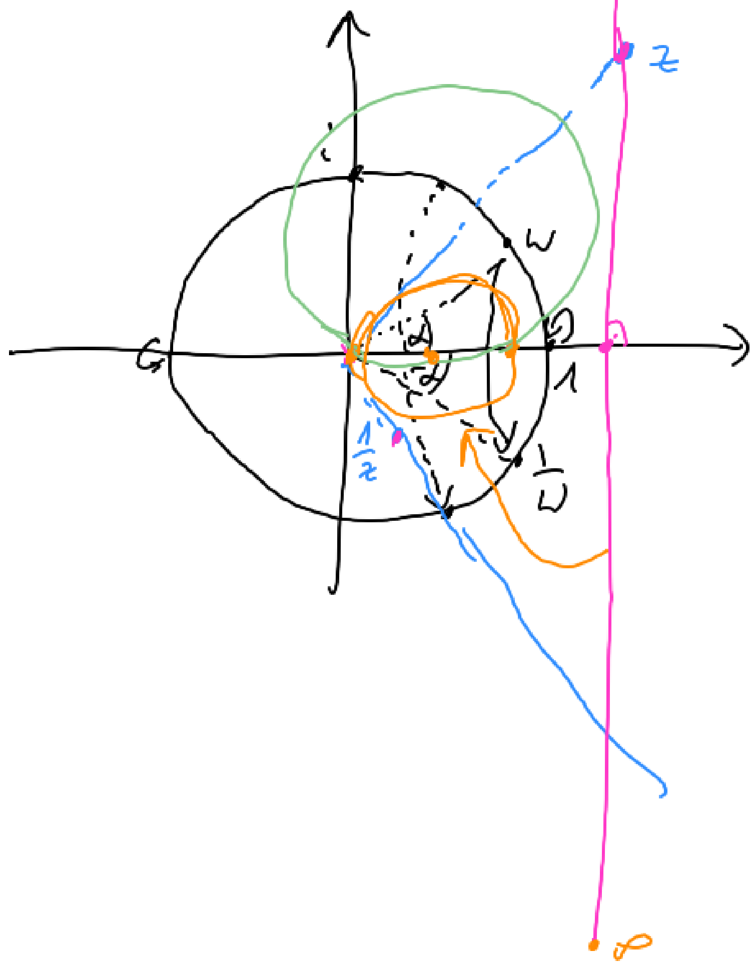
Szeregi Laurenta

$$w \longmapsto \frac{1}{w}$$

$$\left(\frac{1}{w} \longmapsto w \right)$$

$$\frac{1}{0} = \infty$$

$$\frac{1}{\infty} = 0 \qquad \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$



$$w \cdot \frac{1}{w} = 1$$

Def

Szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n := \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{-1} a_n (z-p)^n + \lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{M} a_n (z-p)^n$$

nazywamy szeregiem Laurenta.

- Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ ma promień zbieżności równy $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

(może być $R=0$, wtedy ten szereg jest zbieżny tylko dla $z=p$).

Jeśli $R>0$, to ten szereg jest zbieżny na $D(p,R)$ i rozbieżny na $\mathbb{C} \setminus \overline{D(p,R)}$.

• Szereg $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-p)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \Big(\underbrace{\frac{1}{z-p}}_{w=\frac{1}{z-p}}\Big)^n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n \qquad (*)$$

to ci jest szereg potęgowy zmiennej $w = \frac{1}{z-p}$, więc ma pr. zbieżności $\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}}$, jeśli $\rho > 0$, to szereg (*) jest zbieżny na $D(0,\rho)$ i rozbieżny na $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,\rho)}$

$|w| < \rho \overset{(*)}{-}$ zbieżny $\qquad |w| < \rho \iff \frac{1}{|z-p|} < \rho \iff |z-p| > \frac{1}{\rho}$

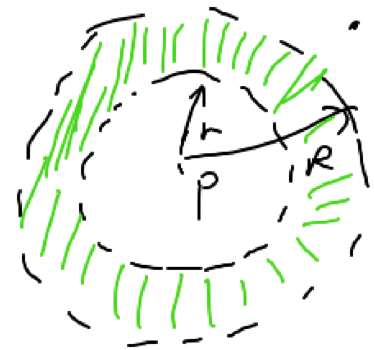
$|w| > \rho \overset{(*)}{-}$ rozbieżny $\longleftrightarrow$ $|w| > \rho \iff |z-p| < \frac{1}{\rho}$

Cały szereg Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$ jest:

• zbieżny na $A(p,r,R) := D(p,R) \setminus \overline{D(p,r)}$ $(0 \le r < R \le \infty)$

konwencja:

• $D(p,\infty) = \mathbb{C}$



jeśli $r = \frac{1}{\rho} < R$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$ jest zbieżny na $D(p,R)$

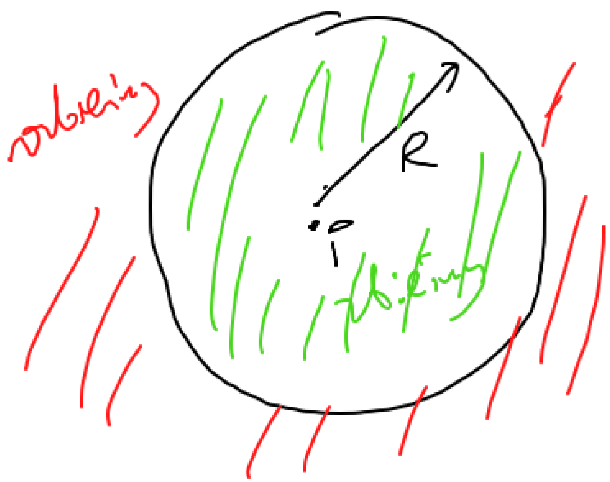
rozb. na $\mathbb{C} \setminus \overline{D(p,R)}$

$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n$

• $\overline{D(p,0)} = \{p\}$

$\parallel$

$\{w : |w-p| \le 0\}$



• jeśli $\frac{1}{\rho} = R$, to szereg L. może być zbieżny tylko na dużym $\partial D(p,R)$

• gdy $\frac{1}{\varrho} > R$, to szereg L. jest wszędzie rozbieżny.

Z tego co dotąd powiedzieliśmy wynika, że jeśli szereg

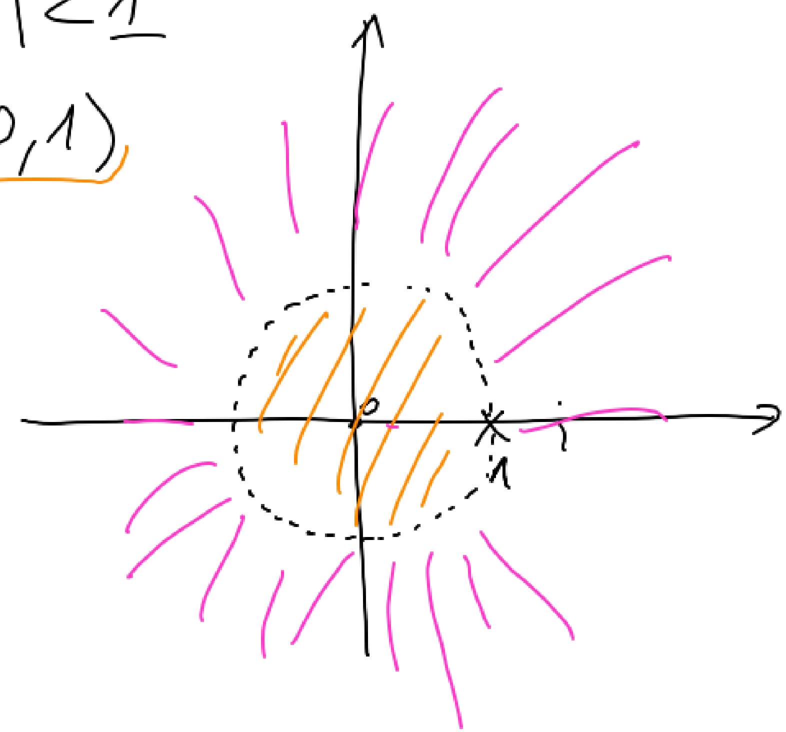
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$$

jest zbieżny na $A(p,r,R)$ $(0 \le r < R \le \infty)$, to jego suma jest funkcją holomorficzną na $A(p,r,R)$.

Przykład

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad , \text{ dla } |z|<1$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{-1} 0\cdot z^n+\sum_{n=0}^{\infty} 1\cdot z^n \qquad z\in \underline{A(0,0,1)}$$

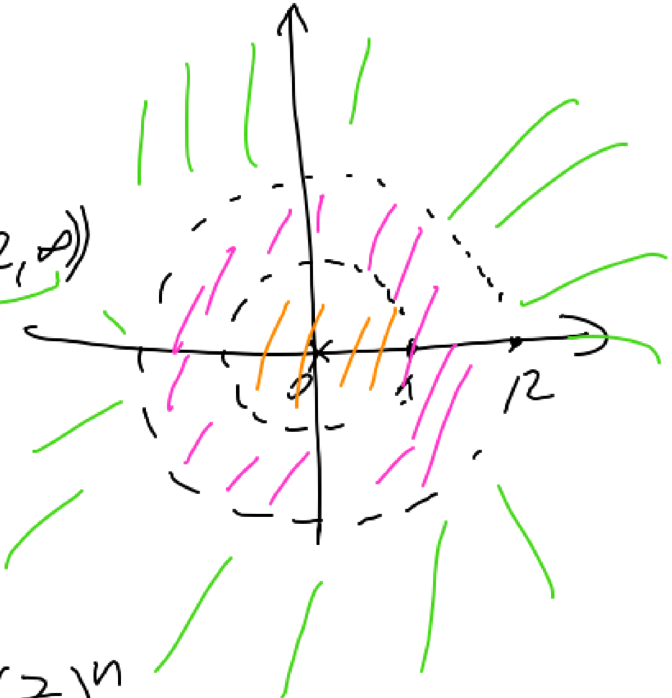


$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{\frac{1}{z}-1}=\frac{-1}{z}\,\frac{1}{1-\underbrace{\frac{1}{z}}_{w}}=$$

$$=\frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n= \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<1 \quad \text{czyli} \quad |z|>1$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}=-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{\overset{n}{\cancel{-n}}}+\sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot z^n \qquad z\in \underline{A(0,1,\infty)}$$

$$g(z) = f(z) + f\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$



$g \in H(A(0,0,1))$, $g \in H(A(0,1,2))$, $g \in H(A(0,2,\infty))$

dla $z \in A(0,1,2)$: $1 < |z| < 2$

$$g(z) = f(z) + f\left(\frac{z}{2}\right) = \underbrace{-\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n}$$

Twierdzenie (wzór Cauchy'ego)

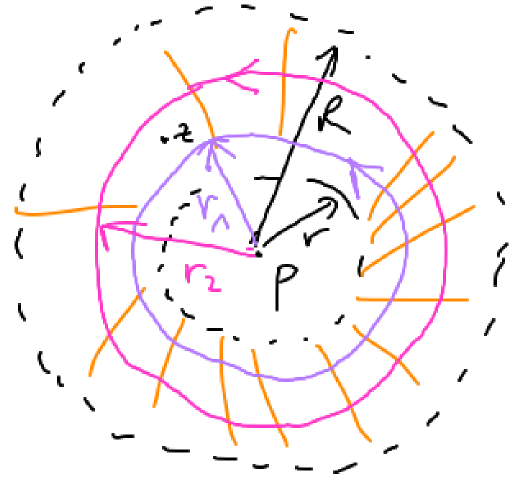
Załóżmy, że $f \in H(A(p,r,R))$, gdzie $r<R$ oraz niech $\gamma_j = p + r_j e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ będą dodatnio zorientowanymi okręgiem o środku w p i promieniu r_j $(j=1,2)$, $r<r_1<r_2<R$

Wówczas

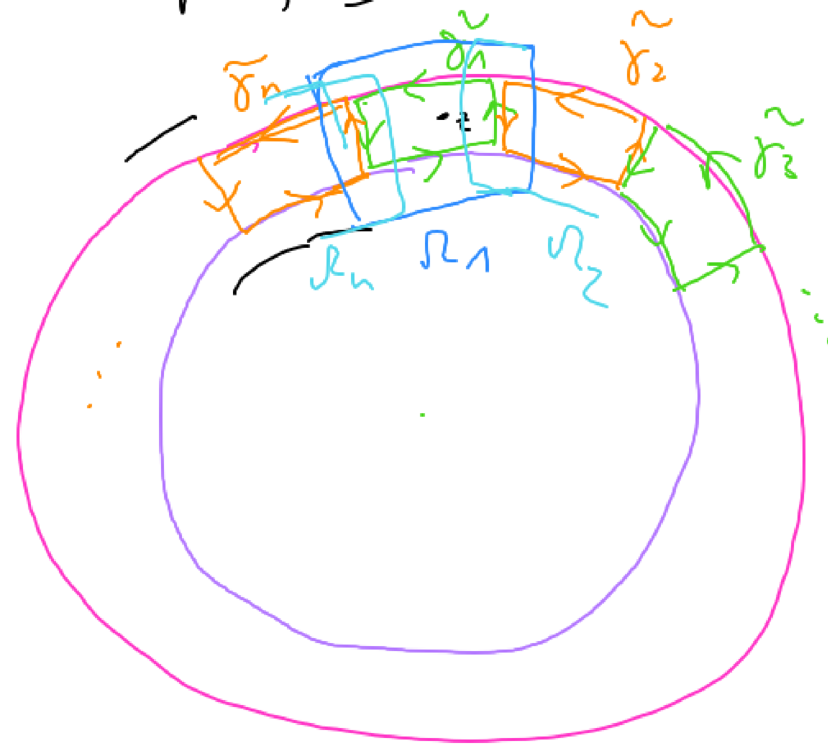
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right) \frac{f(w)\,dw}{w-z}$$

dla $z \in A(p, r_1, r_2)$.

(czyli $r_1<|z-p|<r_2$)



Dd: Dla ustalonych r_1, r_2 i z zapisujemy



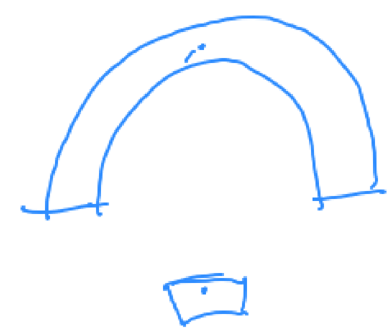
$$\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tilde{\gamma}_k}$$

gdzie $\tilde{\gamma}_k$ są drogami zamkniętymi o takiej własności, że istnieje gwiaździste otwarte $\Omega_k \subset \Omega$ takie, że $\tilde{\gamma}_k^* \subset \Omega_k$, $z \notin \tilde{\gamma}_k^*$ oraz $\operatorname{Ind}_{\tilde{\gamma}_k}(z) = \begin{cases} 1, & k=1 \\ 0, & k=2,\dots,n \end{cases}$

$z \notin \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n$

Ze wzoru Cauchy'ego dla $\tilde{\gamma}_1$ i $f|_{\Omega_1}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{f(w)\,dw}{w-z} = f(z)$$

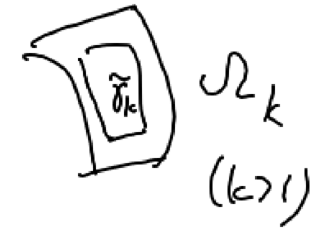


Dla $\tilde{\gamma}_k$ i funkcji $g(w) = \frac{f(w)}{w-z} \in H(\Omega_k)$ mamy

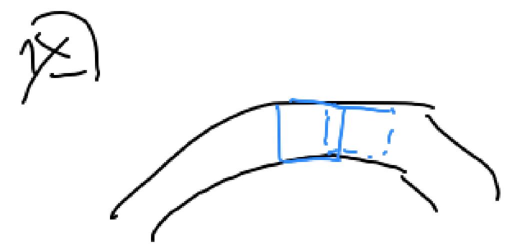
$$\int_{\tilde{\gamma}_k} g(w)\,dw = 0$$

$$\|$$

$$\int_{\tilde{\gamma}_k} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$



Dostajemy tezę.

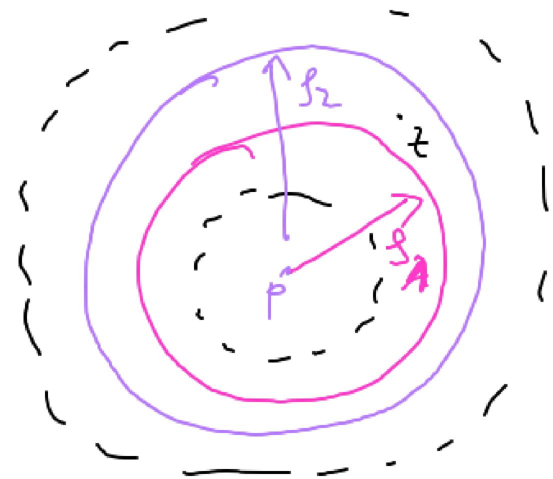


Wniosek

Jeśli $f \in H(A(p,r,R))$ i $\gamma_j(t) = p + \varrho_j e^{it}$, gdzie $r < \varrho_j < R$ $(j=1,2)$

to

$$\int_{\gamma_1} f(w)\,dw = \int_{\gamma_2} f(w)\,dw$$



Dowód. Niech $\varrho_1 < \varrho_2$. Ustalmy $z \in A(p,\varrho_1,\varrho_2)$

$$\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right) f(w)\,dw =$$

$$= \left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right) \frac{\overbrace{f(w)(w-z)}^{\in H(A(p,r,R))}}{w-z}\,dw \underset{\text{wzór C.}}{=} 2\pi i \underbrace{f(z)(z-z)}_{\text{(w punkcie } z)} = 0$$

$\boxtimes$