$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n}_{\text{szereg Laurenta}} := \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n}_{\text{zbieżny na } \mathbb{C}\setminus\overline{D(p,r)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n}_{\text{szereg Taylora zbieżny na } D(p,R)}$$

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$r = \limsup_{n\to-\infty} \sqrt[|n|]{|a_n|}$$

$\downarrow$

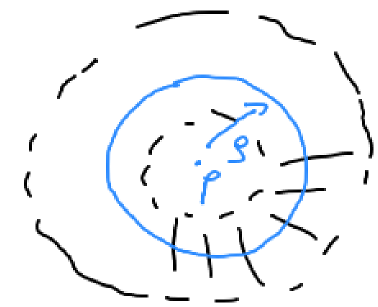
zbieżny na pierścieniu

$$A(p,r,R) = D(p,R) \setminus \overline{D(p,r)}$$

(o ile $r < R$)

Tw. Załóżmy, że $f \in H(A(p,r,R))$, gdzie $r<R$. Niech

$$\gamma(t) = p + \rho e^{it}, \quad t\in[0,2\pi), \quad \rho \in (r,R).$$



Wówczas

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n, \quad z \in A(p,r,R),$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \boxed{\frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}}\, dz, \quad n\in\mathbb{Z}.$$

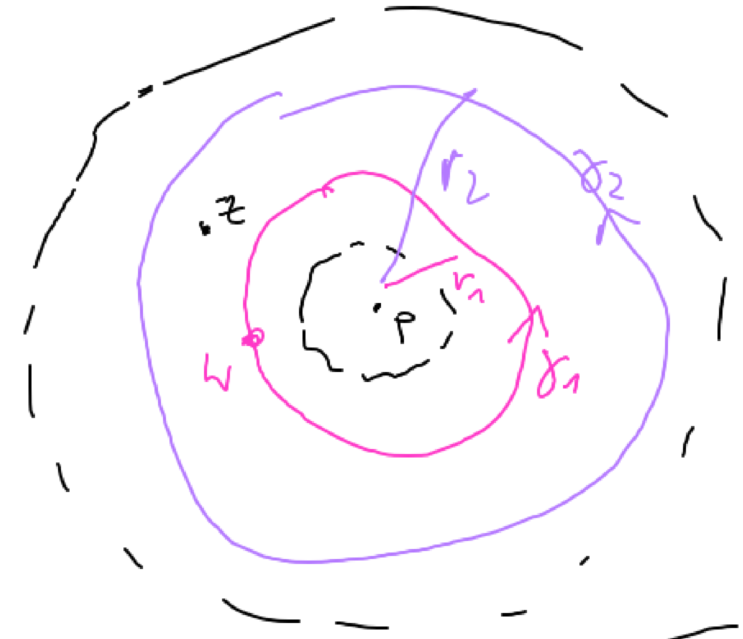
$\in H(A(p,r,R))$

D-d.
Z wniosku z zeszłego tygodnia całka określająca a_n nie zależy od wyboru $\rho\in(r,R)$. Ustalmy $r<r_1<r_2<R$ i okręgi

$$\gamma_j(t) = p + r_j e^{it}, \quad t\in[0,2\pi), \quad j=1,2.$$

Niech $z \in A(p, r_1, r_2)$.

Ze wzoru Cauchy'ego dla pierścienia:



$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_1}\right)\frac{f(w)\,dw}{w-z} =: I_2 - I_1$$

Mamy

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(w-p)-(z-p)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)\,dw}{(z-p)\left(\frac{w-p}{z-p} - 1\right)} = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{z-p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-p}{z-p}\right)^n dw \underset{\text{Fubini}}{=}$$

$|\cdot| < 1$

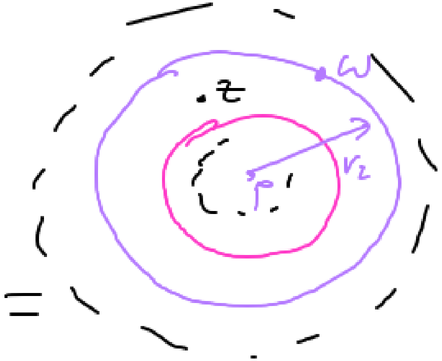
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x|<1$$

$$\left\{ \int_{\gamma_1}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{f(w)}{z-p}\left(\frac{w-p}{z-p}\right)^n\right| |dw| = \int_{\gamma_1}\underbrace{\frac{|f(w)|}{|z-p|}\,\frac{1}{1-\frac{r_1}{|z-p|}}}_{\text{ogr.}}|dw| < \infty \right\}$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \frac{-1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{z-p} \left(\frac{w-p}{z-p}\right)^n dw =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (z-p)^{-n-1} \underbrace{\int_{\gamma_1} f(w)\,(w-p)^n \, dw}_{= \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w-p)^{(-n-1)+1}} dw \,=\, 2\pi i \, a_{-n-1}} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} (z-p)^{-n-1} a_{-n-1} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n$$

Dalej, $I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)\,dw}{(w-p)-(z-p)} =$ 

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)\,dw}{(w-p)\left(1-\underbrace{\frac{z-p}{w-p}}_{|\cdot|<1}\right)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-p}{w-p}\right)^n dw =$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}(z-p)^n \underbrace{\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{(w-p)^{n+1}}\,dw}_{2\pi i\, a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n$$

(uzasadnienie jak poprzednio)

Podsumowując,

$$f(z) = I_2 - I_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-p)^n .$$

$\boxtimes$

Uwaga

Jeśli $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^n$ dla $z\in A(p,r,R)$, $r<R$, to

dla $\gamma(t)=p+\rho e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $\rho\in(r,R)$ oraz $k\in\mathbb{Z}$

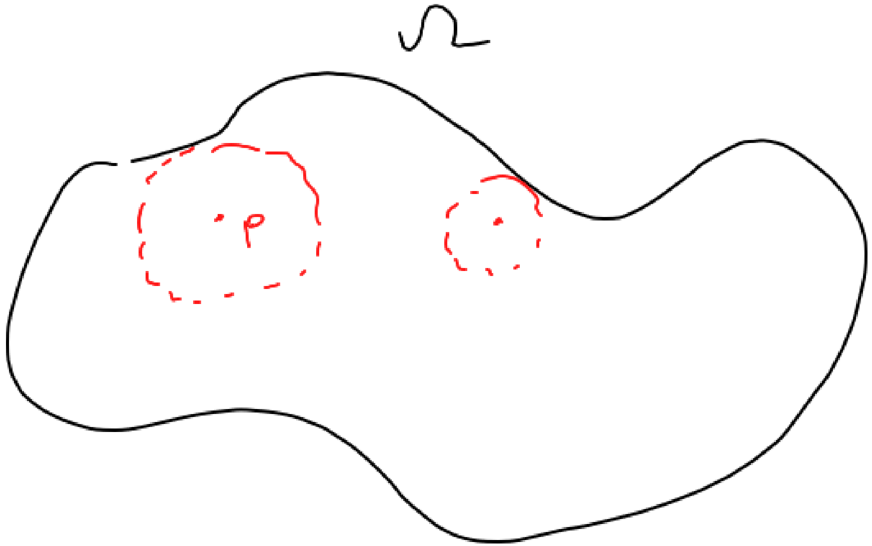
zachodzi:

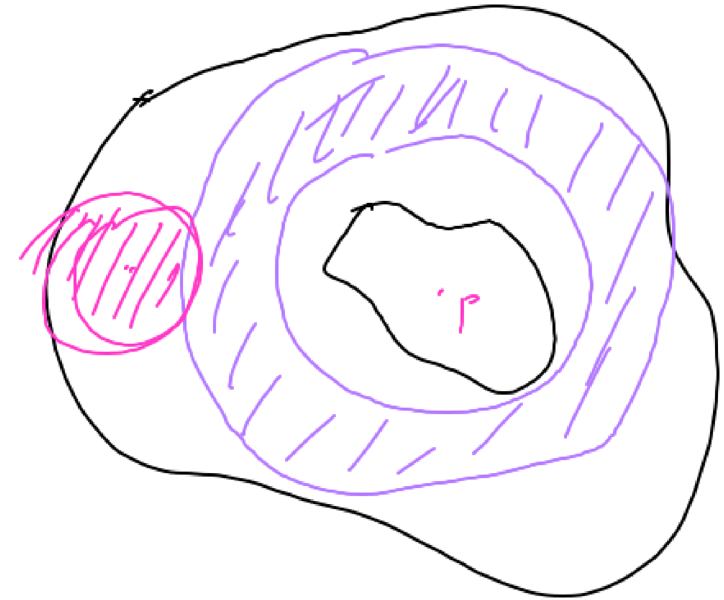
$$\int_\gamma f(z)(z-p)^k\,dz = \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-p)^{n+k}\,dz \underset{\text{Fubini}}{=}$$

(z jednostajnej zbieżności szeregów L. / potęgowych)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \underbrace{\int_\gamma (z-p)^{n+k}\,dz}_{\substack{=0 \text{ gdy } n+k\neq -1 \\ =2\pi i \text{ gdy } n+k=-1}} = a_{-k-1}\cdot 2\pi i$$

Stąd wynika, że rozwinięcie w szereg Laurenta jest jednoznaczne.


Ω
p


p

Iloczyny nieskończone

Tw. o zerach: $f \in H(\Omega)$, Ω - obszar, $f \not\equiv 0$

$Z(f) = f^{-1}(\{0\})$ nie ma punktów skupienia w Ω.

np. $f(z) = \sin z$ ma zera w $\pi \cdot \mathbb{Z}$

Def. Załóżmy, że ciąg (u_n) liczb zespolonych jest taki, że ciąg

$$p_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)$$

jest zbieżny (w $\mathbb{C}$) do pewnej liczby $p \in \mathbb{C}$. Mówimy wtedy, że iloczyn nieskończony $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ jest zbieżny do p.

(Często zakłada się dodatkowo, że granica $p \neq 0$, ale nie będziemy tego robić).

Lemat. Jeśli $u_1, u_2, \dots, u_N \in \mathbb{C}$ oraz

$$p_N = \prod_{n=1}^{N} (1+u_n) \quad , \qquad p_N^* = \prod_{n=1}^{N} (1+|u_n|) \quad ,$$

to

$$|p_N| \leq p_N^* \leq \exp\left(|u_1|+|u_2|+\dots+|u_N|\right)$$

$$\left|\sum u_n\right| \leq \sum |u_n|$$

oraz

$$|p_N - 1| \leq p_N^* - 1 \qquad (*)$$

Dowód. Dla $x \geq 0$ zachodzi $e^x \geq 1+x$, stąd

$$p_N^* \leq \prod_{n=1}^{N} e^{|u_n|} = \exp\left(|u_1|+|u_2|+\dots+|u_N|\right).$$

Drugą część dowodzimy przez indukcję. Dla $N=1$ $(*)$ jest oczywiste:

$$|u_1| \leq 1+|u_1| - 1$$

Załóżmy, że $(*)$ zachodzi dla pewnego $N \geq 1$.

$$|\underbrace{p_{N+1}}_{= \prod_{n=1}^{N+1}(1+u_n)} - 1| = |p_N(1+u_{N+1}) - 1| = |(\underbrace{p_N - 1} + 1)(1+u_{N+1}) - 1| =$$

$$= |(p_N - 1)(1+u_{N+1}) + u_{N+1}| \leq |p_N - 1| \cdot (1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| \underset{\text{zak. ind.}}{\leq}$$

$$\leq (p_N^* - 1)(1 + |u_{N+1}|) + |u_{N+1}| = \underbrace{p_N^* (1 + |u_{N+1}|)}_{p_{N+1}^*} - 1 - \cancel{|u_{N+1}|} + \cancel{|u_{N+1}|}$$

$$= p_{N+1}^* - 1.$$

$\boxtimes$

Tw. Załóżmy, że $\{u_n\}$ jest ograniczonych funkcji zespolonych na zbiorze S takich, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ jest zbieżny jednostajnie na S. Wówczas iloczyn

$$f(s) := \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + u_n(s)\right)$$

jest zbieżny jednostajnie na S, ponadto $f(s_0) = 0$ dla pewnego $s_0 \in S$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n(s_0) = -1$ dla pewnego n.

D-d Z założeń wynika, że $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ jest ograniczony na S. Niech $p_N^{(s)} = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n(s))$, z lematu wynika, że istnieje stała C taka, że $|p_N(s)| \leq C$.

$$|p_N(s)| \leq 1 + |p_N(s) - 1| \leq 1 + p_N^{*}(s) - 1 = p_N^{*}(s) \leq \exp\left(\sum |u_n(s)|\right)$$

Mamy dla dowolnych $s \in S$ oraz $N > M$:

$$|p_N(s) - p_M(s)| = |p_M(s)| \cdot \left| \prod_{n=M+1}^{N} (1 + u_n(s)) - 1 \right| \underset{\text{lemat: (*)}}{\leq}$$

$$\leq |p_M(s)| \left(\prod_{n=M+1}^{N} (1 + |u_n(s)|) - 1 \right) \underset{\text{lemat: część } \underline{1}}{\leq}$$

$$\leq |p_M(s)| \left(\exp\left(\sum_{n=M+1}^{N} |u_n(s)| \right) - 1 \right) \leq \qquad (\square)$$

$$\leq C \left(\exp\left(\sum_{n=M+1}^{N} |u_n(s)| \right) - 1 \right) \qquad (\triangle)$$

Ze zb. jedn. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(s)|$ wynika, że $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{N > M \geq n_0} \forall_s \left(\sum_{n=M+1}^{N} |u_n(s)| < \varepsilon \right)$

Stąd i z nierówności $(\triangle)$ wynika, że ciąg funkcyjny $(p_N(s))_N$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(M(S), \|\cdot\|_S)$, a więc jest zbieżny jedn. do pewnej funkcji: $f \in M(S)$.

↑ f ogr. na S

Teraz zakładamy, że $\underline{f(s_0)=0}$ dla pewnego $s_0 \in S$.

Niech M będzie na tyle duże, by

$$\exp\left(\sum_{n=M+1}^{\infty} |u_n(s_0)|\right) - 1 < \frac{1}{2}.$$

Z nierówności (D) wynika, że dla $N > M$ zachodzi

$$|p_N(s_0) - p_M(s_0)| \leq |p_M(s_0)| \cdot \frac{1}{2}$$

Stąd i z nier. trójkąta:

$$|p_N(s_0)| \geq |p_M(s_0)| - |p_N(s_0) - p_M(s_0)| \geq |p_M(s_0)| - \frac{|p_M(s_0)|}{2} = \frac{1}{2}|p_M(s_0)|$$

$$\Big\downarrow {\scriptstyle N\to\infty}$$

$f(s_0)=0$. Stąd $p_M(s_0) = 0 = \prod_{n=1}^{M}(1+u_n(s_0))$. $\boxtimes$

Wniosek

Jeśli $u_n \in H(\Omega)$ są takie, że $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny

wj. na Ω, to iloczyn

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + u_n(z)) \quad , z \in \Omega$$

jest zbieżny wj. na Ω, $f \in H(\Omega)$ oraz

$f(z_0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n(z_0) = -1$ dla pewnego n.