Wniosek. Jeśli $u_n \in H(\Omega)$ są takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ jest nj. zbieżny na Ω, to iloczyn

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + u_n(z)\right) \quad , \; z \in \Omega$$

jest zbieżny nj. na Ω, $f \in H(\Omega)$ oraz $f(z_0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u_n(z_0) = -1$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Tw. Niech $u_n \in H(\Omega)$ będą takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ jest zbieżny nj. na Ω. Niech

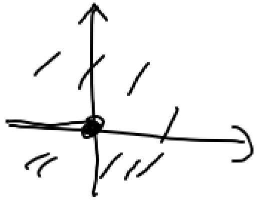
$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + u_n(z)\right), \quad z \in \Omega.$$

Dla $z \in \Omega$ takich, że $f(z) \neq 0$ zachodzi wzór

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n'(z)}{1 + u_n(z)},$$

przy czym szereg po prawej stronie jest zbieżny nj. na $\Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$.

$\frac{f'}{f}$ – „pochodna logarytmiczna f" ; $(\mathrm{Log}\, f)' = \frac{1}{f} \cdot f'$



Dd. Niech $f_N(z) = \prod_{n=1}^{N} (1+u_n(z))$. Jeśli $f_N(z) \neq 0$, to

$$f_N'(z) = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{N} (1+u_k(z)) \right)}_{\substack{\text{nie zależy od } n, \\ = f_N(z)}} \cdot \frac{(1+u_n(z))'}{1+u_n(z)} =$$

$$(gh)' = g'h + gh'$$

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

$$= f_N(z) \sum_{k=1}^{N} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}$$

$$(*) \qquad \frac{f_N'(z)}{f_N(z)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{u_n'(z)}{1+u_n(z)}.$$

Z wniosku wynika, że $f_N \to f$ n.j. w Ω, więc – jak wiemy – też $f_N' \to f'$ n.j. w Ω.

Niech $K \subset\subset \Omega \setminus f^{-1}(\{0\})$.

Wówczas $|f| \geqslant \varepsilon > 0$ na zbiorze K, a ponieważ $f_n \rightrightarrows f$ na K,

to też $|f_N| \geqslant \varepsilon/2$ dla dużych N, na zbiorze K.

Skąd wynika, że $\dfrac{f_N'}{f_N} \rightrightarrows \dfrac{f'}{f}$ na K, a stąd i z $(*)$

wynika teza.

$\boxtimes$

Lemat. Jeśli $f \in H(\mathbb{C})$ nie ma zer, to istnieje $h \in H(\mathbb{C})$ taka, że $f = \exp(h)$.

Dd.

$$\begin{cases} \text{„}h = \operatorname{Log} f\text{"} \\ h' = \frac{f'}{f} \end{cases}$$

Niech $g \in H(\mathbb{C})$ będzie funkcją pierwotną funkcji $\frac{f'}{f} \in H(\mathbb{C})$.

Liczymy $(f e^{-g})' = f' e^{-g} + f (e^{-g})' = f' e^{-g} + f e^{-g} \cdot \left(-\frac{f'}{f}\right) = 0$,

zatem $f e^{-g} = \underbrace{\text{const.}}_{=c} \neq 0$, niech $c = \exp(C_1)$, wtedy

$$f = c e^{g} = e^{C_1} e^{g} = e^{g + C_1},$$

możemy więc wziąć $h = g + C_1$. $\boxtimes$

Przykład (Rozkład funkcji $\sin \pi z$).

Niech $g(z) = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$. Ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\left|-\frac{z^2}{n^2}\right|$ jest zbieżny nj. na $\mathbb{C}$ (z kryt. Weierstrassa), więc z ~~twierdzenia~~ wniosku funkcja g jest dobrze określona i całkowita, ponadto ma pierwiastki tylko w punktach $\mathbb{Z}$. Pierwiastki te są ~~jed~~ jednokrotne, bo widać wyciągając czynnik $\left(1-\frac{z^2}{n_0^2}\right)$ przed iloczyn nieskończony:

$$g(z) = z\left(1-\frac{z^2}{n_0^2}\right) \underbrace{\prod_{\substack{n=1 \\ n\neq n_0}}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)}_{\text{nie ma zera w } \pm n_0}.$$

Zatem funkcja $\frac{\sin \pi z}{g(z)}$ ma tylko osobliwości pozorne, rozszerza się więc do funkcji całkowitej, która nie ma żadnych zer. Zatem z lematu

$$\sin \pi z = e^{h(z)} \cdot g(z) = e^{h(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C},$$

dla pewnej funkcji $h \in H(\mathbb{C})$. Z twierdzenia o pochodnej logarytmicznej:

$$\frac{(\sin \pi z)'}{\sin \pi z} = \frac{\left(e^{h(z)}\right)'}{e^{h(z)}} + \frac{z'}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)'}{1 - \frac{z^2}{n^2}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

ponadto szereg po prawej jest zb. nj. na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{\pi \cos \pi z}{\sin \pi z} = h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\frac{2z}{n^2}}{1 - \frac{z^2}{n^2}} \underset{(*)}{=} h'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right)$$

spr.

$$\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}=\frac{z+\cancel{n}+z-\cancel{n}}{z^2-n^2}=\frac{\frac{2z}{n^2}}{\frac{z^2}{n^2}-1}=\frac{-\frac{2z}{n^2}}{1-\frac{z^2}{n^2}}$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = h'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right), \qquad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}, \qquad (**)$$

przy czym szereg po prawej jest zbieżny nj. na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

Niemal jednostajnie zbieżny szereg funkcji holomorficznych możemy różniczkować wyraz po wyrazie [bo jeśli $g_N\to g$ nj., to $g_N'\to g'$ nj., o ile $g_N\in H(\Omega)$], zatem

$$(\pi \operatorname{ctg}\pi z)' = h''(z)-\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right)' = h''(z)-\frac{1}{z^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(z-n)^2}+\frac{1}{(z+n)^2}\right),$$

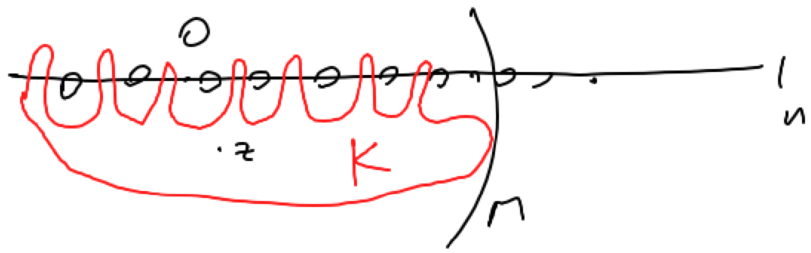
$$(\pi \operatorname{ctg}\pi z)' = \frac{-\pi^2}{\sin^2\pi z}$$

$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

jest zbieżny nj. na $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$

Zauważmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$ są zbieżne nj. na $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Jeśli $K \subset\subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, to K jest ograniczony, tj. $|z| \le M$ dla $z \in K$.



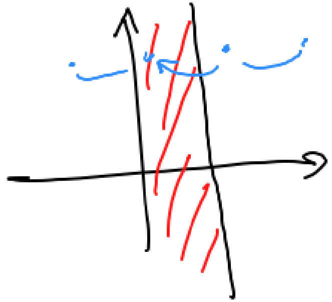
Wtedy dla $\underline{n \ge 2M}$:

$$\left|\frac{1}{(z-n)^2}\right| = \frac{1}{|z-n|^2} \le \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2} = \frac{4}{n^2}$$

$$|z-n| \ge n - |z| \ge \frac{n}{2} + \frac{n}{2} - |z| \ge \frac{n}{2} + \underbrace{M - |z|}_{} \ge \frac{n}{2}$$

Z kryt. Weierstrassa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ jest zb. jedn. na K.

Dostajemy:



$$\frac{-\pi^2}{\sin^2 \pi z} = h''(z) - \frac{1}{z^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{(z+n)^2}_{z-(-n)}} =$$

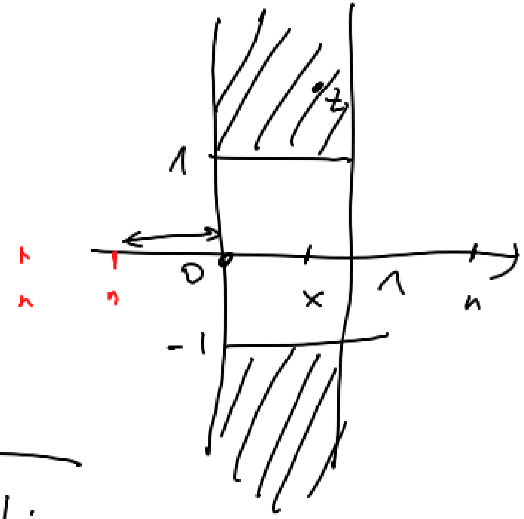
$$= h''(z) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

czyli

$$\boxed{h''(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \qquad (***)$$

Stąd $h''(z+1) = h''(z)$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, więc z tw. o zerach $h''(z+1) = h''(z)$ dla $z \in \mathbb{C}$. Wobec tego $h''(\mathbb{C}) = h''(\{z : 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\})$.

Jeśli $z = x + yi$, gdzie $x \in [0,1]$, $|y| \geq 1$, to



$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z-n|^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2+y^2} \leq$$

$$\leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+y^2} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \infty$$

dla $n = 0, 1$:

$$\frac{1}{(x-n)^2+y^2} \leq \frac{1}{y^2}$$

dla $n \geq 2$:

$$\frac{1}{(x-n)^2+y^2} \leq \frac{1}{(n-1)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x-n)^2+y^2} \leq \frac{2}{y^2} + \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n-1)^2+y^2}$$

dla $n \leq -1$:

$$(x-n)^2 \geq n^2$$

więc

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-n)^2+y^2} \leq \sum_{-\infty}^{-1} \frac{1}{n^2+y^2} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2+y^2}$$

Ponadto $(z = x+yi)$

$$|\sin^2 \pi z| = \frac{|e^{\pi z i} - e^{-\pi z i}|^2}{4} = \frac{|(e^{-\pi y} - e^{\pi y})\cos \pi x + i(e^{-\pi y} + e^{\pi y})\sin \pi x|^2}{4} =$$

$$= \frac{(e^{-\pi y} - e^{\pi y})^2 \cos^2 \pi x + (e^{-\pi y} + e^{\pi y})^2 \sin^2 \pi x}{4} = \frac{(e^{-2\pi y} + e^{2\pi y}) - 2\cos 2\pi x}{4} \geq$$

$$\geq \frac{e^{2\pi|y|} - 2}{4} \geq \frac{e^{2\pi} - 2}{4} > 0$$

Stąd $\left|\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}\right|$ jest ograniczone na $\{z = x+yi : x \in [0,1], |y| \geq 1\}$,

Zatem na zbiorze $\{z = x+yi : x \in [0,1], |y| \geq 1\}$ funkcja h'' jest ograniczona.

h'' jest też ogr. na $\{x+yi : x \in [0,1], |y| \leq 1\}$ (bo to zbiór zwarty)

Z 1-okresowości h'' wynika, że h'' jest ograniczone.

Z tw. Liouville'a $h'' = \text{const}.$

Ze wzoru (***), biorąc $x \in [0,1]$ i $y \to \infty$ widzimy, że

$h''(x+yi) \to 0$

Zatem $h'' = 0$, czyli $h' = \text{const}.$

Ze wzoru (**) h' jest nieparzysta, a więc $h' \equiv 0.$

Stąd $h = \text{const}.$

$$\underbrace{\frac{\sin \pi z}{z}}_{\substack{\downarrow z \to 0 \\ \pi}} = \underbrace{e^{h(z)}}_{\substack{\downarrow \\ e^{h(0)}}} \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)}_{\substack{\downarrow z \to 0 \\ 1}}$$

$$\pi = e^{h(0)}$$

$$\Rightarrow e^{h(z)} = \pi \quad \forall z$$

Zatem

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right) \;„=“\; \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{z-n}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

kłopot ze zbieżnością

$$\Rightarrow \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$