$$\begin{cases} \sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right), & z \in \mathbb{C} \\ \pi \operatorname{ctg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right), & z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \\ \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n)^2}, & z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z} \end{cases}$$

$$E_1(z) = (1-z)e^{z}$$

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}}}_{E_1\left(\frac{z}{n}\right)} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}}_{E_1\left(\frac{z}{-n}\right)} =$$

$$= \pi z \left(\prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right)\right)\cdot\left(\prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{-n}\right)\right) = \pi z \prod_{n\neq 0} E_1\left(\frac{z}{n}\right)$$

zbieżne z tw.(∆), bo $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{n}\right)^{1+1} = r^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$

Def. (czynniki Weierstrassa)

$$E_0(z) = 1 - z$$
$$E_p(z) = (1-z)\cdot\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^p}{p}\right), \quad p = 1, 2, \dots$$

$$E_p(0) = 1$$
$$E_p(1) = 0$$

Lemat. Dla $|z| \le 1$ i $p = 0, 1, 2, \dots$ zachodzi:

$$|1 - E_p(z)| \le |z|^{p+1}.$$

D-d. Dla $p = 0$ oczywiste: $|z| \le |z|$. Dla $p \ge 1$.

$$E_p'(z) = -\exp(\dots) + (1-z)\cdot\exp(\dots)\cdot\left(1 + z + \dots + z^{p-1}\right) =$$
$$= \exp(\dots)\left[-1 + (1 - z^p)\right] = -z^p \exp(z)\,\overbrace{\exp\left(\frac{z^2}{2}\right)}\dots\overbrace{\exp\left(\frac{z^p}{p}\right)}^{=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z^p}{p}\right)^n}{n!}}.$$

każdy czynnik ma nieujemne wsp. w rozw. M

Stąd $-E_p'$ ma w rozwinięciu Maclaurina nieujemne współczynniki.
Ponadto $z = 0$ jest p-krotnym zerem funkcji E_p'.

Stąd funkcja $1-E_p$ ma zero $(p+1)$-krotne w zerze i ma w wzr. M wszystkie współczynniki, zatem

$$\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad , a_n \geq 0$$

Stąd dla $|z| \leq 1$: $(z \neq 0)$

$$\left|\frac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} a_n |z|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{1-E_p(1)}{1^{p+1}} = 1$$

$$|1-E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \quad , |z| \leq 1$$

$\boxtimes$

Tw. (Δ) Niech $\{z_n\}$ będzie ciągiem liczb zespolonych takim, że $z_n \neq 0$ i $|z_n| \to \infty$, gdy $n \to \infty$. Jeżeli $\{p_n\}$ jest ciągiem liczb całkowitych nieujemnych takim, że

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty \qquad \forall_{r>0},$$

gdzie $r_n = |z_n|$, to iloczyn nieskończony

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

określa f. całkowitą P, która ma pierwiastek w każdym punkcie z_n i nie ma pierwiastków w innych punktach $\mathbb{C}$. Jeśli $\alpha \in \mathbb{C}$ występuje m razy w ciągu $\{z_n\}$, to α jest m-krotnym zerem funkcji P.

Warunek $(*)$ jest zawsze spełniony np. dla $p_n = n-1$.

Gdy $p_n = 0$: $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$; $\quad P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) \exp(\ldots)$

Dowód.

- Dla dowol. $r>0$ zachodzi nierówność $r_n \overset{|z_n|\to\infty}{>} 2r$ ~~dla~~ dla dużych n.

Zatem
$$\frac{r}{r_n} < \frac{1}{2} \quad \text{dla dużych } n,$$
jeśli $p_n = n-1$, to
$$\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} = \left(\frac{r}{r_n}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{dla dużych } n$$

Stąd $\sum\left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty$.

- Ustalmy $r>0$. Jeśli $|z| \le r$, to dla n tak dużych, by $r_n \geq r$

zachodzi: $\left|\frac{z}{r_n}\right| \le \left|\frac{r}{r_n}\right| \le 1$, więc z lematu
$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \le \left(\frac{|z|}{r_n}\right)^{1+p_n} \le \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}$$

Z $(*)$, pow. nierówności i kryt. Weierstrassa dostajemy, że szereg $\sum\left|1 - E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$ jest zb. jedn. na $\overline{D(0,r)}$

Stąd z jednego z poprz. tw. dostajemy niem. zbieżność iloczynu $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(1-E_p\left(\frac{z}{z_n}\right)\right)\right) = P(z)$ i teza.

Tw. (Weierstrass o rozkładzie na czynniki)

Niech $f \in H(\mathbb{C})$, $f \neq 0$, niech $z_1, z_2, \ldots$ będą niezerowymi pierwiastkami funkcji f wypisanymi z uwzględnieniem ich krotności. Niech f ma w zerze zero krotności $k \geq 0$. Istnieją wtedy funkcja $g \in H(\mathbb{C})$ oraz ciąg $p_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takie, że

$$f(z) = e^{g(z)} z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Dd. Niech $P(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$ np. dla $p_n = n-1$. Funkcje f i P mają zera w ~~dokładnie~~ tych samych punktach i tych samych krotności, zatem funkcja $\frac{f}{P}$ ma tylko osobliwości pozorne, a jej rozszerzenie holomorficzne do $\mathbb{C}$ jest funkcją wszędzie różną od 0. Istnieje więc $g \in H(\mathbb{C})$ t. że $\frac{f}{P} = e^{g}$, stąd teza.

• Funkcja Gamma Eulera

$$n^z = e^{z\ln n}$$

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$$

Pokażemy, że ta granica istnieje:

$$\frac{1}{G(z)} = \lim_{n\to\infty} \frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!\, n^z} = z\cdot\lim_{n\to\infty} (1+z)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\dots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z\ln n} =$$

$$= z\lim_{n\to\infty} \underbrace{(1+z)e^{\frac{z}{-1}}}_{E_1\left(\frac{z}{-1}\right)}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{z}{-2}\right)e^{\frac{z}{-2}}}_{E_1\left(\frac{z}{-2}\right)}\dots\underbrace{\left(1-\frac{z}{-n}\right)e^{\frac{z}{-n}}}_{E_1\left(\frac{z}{-n}\right)}\cdot e^{z\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n}_{= \gamma_n \to \gamma = 0{,}577\dots}\right)} =$$

stała Eulera

$$= z e^{z\gamma}\prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{-n}\right)$$

; $\frac{1}{G} \in H(\mathbb{C})$, która ma zera jednokrotne w $0,-1,-2,\dots$

$$G(z+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^{z+1}}{(z+1)(z+2)\dots(z+n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (nz) \frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)\dots(z+n)} \cdot \frac{1}{z+n+1} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{z}{\frac{z}{n}+1+\frac{1}{n}}}_{\downarrow \atop z} \; \underbrace{\frac{n!\, n^{z}}{z(z+1)\dots(z+n)}}_{\downarrow \atop G(z)} =$$

$$= z\, G(z)\,.$$

Wiemy, że

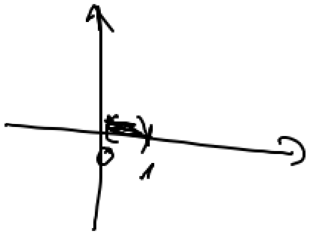
$$\frac{1}{G(z)} = e^{z\gamma} z \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{-n}\right) \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, \dots\}$$

$$\frac{1}{G(-z)} = e^{-z\gamma}(-z) \prod_{n=1}^{\infty} E_1\left(\frac{z}{n}\right) \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{G(z)G(-z)} = -z^2 \underbrace{\boxed{\prod_{n \neq 0} E_1\left(\frac{z}{n}\right)}}_{= \frac{\sin \pi z}{\pi z}} = \frac{-z \sin \pi z}{\pi} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{G(z) \cdot \underbrace{(-z)G(-z)}_{G(1-z)}} = \frac{\sin \pi z}{\pi} \quad \Rightarrow \quad G(z)\, G(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

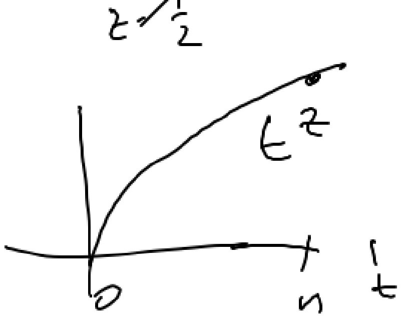
$$G(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$$



$$\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad \operatorname{Re} z>0$$

Sprawdzimy, że $G=\Gamma$ na $(0,1)$, skąd z tw. o zasadzie wynika równość na obszarze holomorficzności obu funkcji

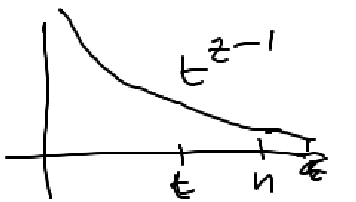
Liczymy dla $z\in(0,1)$



$$\frac{\Gamma(z)}{G(z)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z)\cdot z(z+1)\dots(z+n)}{n!\,n^z}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!\,n^z}$$

Dla $t\in(0,n]$: $\quad t^z\le n^z \quad$ oraz $\quad t^{z-1}\ge n^{z-1}$

Dla $t>n$: $\quad t^z>n^z \quad$ oraz $\quad t^{z-1}<n^{z-1}$



Stąd

$$\Gamma(z+n+1) = \int_0^n \overbrace{\boxed{t}^{z}}^{\le n^z} t^{n+1-1} e^{-t}\,dt + \int_n^\infty t^{z} t^{n+1-1} e^{-t}\,dt \le$$

$$\le n^z \int_0^n t^n e^{-t}\,dt + n^{z-1} \int_n^\infty t^{n+1} e^{-t}\,dt$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_n^\infty t^{n+1} e^{-t}\,dt = \int_n^\infty t^{n+1} (-e^{-t})'\,dt = -t^{n+1} e^{-t}\Big|_n^\infty + \int_n^\infty (n+1)\, t^n e^{-t}\,dt = \\ &= n^{n+1} e^{-n} + (n+1) \int_n^\infty t^n e^{-t}\,dt \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!\cdot n^z} \le \frac{n^z \int_0^n t^n e^{-t}\,dt + n^{n+z} e^{-n} + n^{z-1}(n+1)\int_n^\infty t^n e^{-t}\,dt}{n!\cdot n^z} =$$

$\Gamma(n+1) = n!$

$$= \frac{n^z \boxed{\int_0^\infty t^{(n+1)-1} e^{-t}\,dt} + n^{n+z} e^{-n} + n^{z-1}\int_n^\infty t^n e^{-t}\,dt}{n!\cdot n^z} =$$

$\le \Gamma(n+1) = n!$

$$= 1 + \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!\sqrt{2\pi n}} + \underbrace{\frac{\frac{1}{n}}{n!}\int_n^\infty t^{n+1-1} e^{-t}\,dt}_{\le \frac{1}{n}} \longrightarrow 1$$

1

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Podobnie $\frac{\Gamma(z+n+1)}{n!\cdot n^z} \geq \dots \to 1$

stąd $G = \Gamma$.