Funkcje analityczne Lista 4

53. Oblicz $\int_\gamma ze^{iz}\,dz$, gdzie $\gamma(t) = 2e^{-it}$, $t \in [0, \pi]$.

54. Niech $n \in \mathbb{Z}$. Oblicz całkę $\int_\gamma (z-a)^n\,dz$, jeśli γ

    (a) jest półokręgiem $|z-a| = r$, $0 \le \arg(z-a) \le \pi$ o początku w $a + r$;

    (b) jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w a i promieniu r;

    (c) jest brzegiem kwadratu o środku w a i bokach równoległych do osi układu współrzędnych ($n \neq -1$).

55. Oblicz całkę $\int_\gamma \frac{dz}{z^2-4}$, gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w punkcie 1 i promieniu 2. *Wskazówka*: rozkład na ułamki proste.

56. Niech f będzie funkcją ciągłą w otoczeniu punktu $a \in \mathbb{C}$. Oblicz

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

gdzie γ_ε jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w a i promieniu ε.

57. Niech $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ będą drogami zamkniętymi, niech $w \in \mathbb{C}$ oraz

$$|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| < |w - \gamma_2(t)|, \quad \text{dla } t \in [0,1].$$

    (a) Pokaż, że wzór $\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - w}{\gamma_2(t) - w}$ określa drogę zamkniętą w $\mathbb{C}$.

    (b) Sprawdź, że $|1 - \gamma(t)| < 1$ i wywnioskuj stąd, ile równa się $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$.

    (c) Obliczając z definicji $\mathrm{Ind}_\gamma(0)$ wywnioskuj, że $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(w) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(w)$.

---

58. Niech $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z = 0\}$. Dla $z \in \Omega$ określamy funkcję Log następująco

$$\operatorname{Log} z = \int_{\langle 1, z\rangle} \frac{dw}{w}.$$

Sprawdź, że $\operatorname{Log} \in H(\Omega)$ i oblicz pochodną Log'. Uzasadnij, że $\exp(\operatorname{Log} z) = z$, obliczając pochodną funkcji $g(z) = \exp(\operatorname{Log} z)/z$. Oblicz $\operatorname{Log}(1+i)$, $\operatorname{Log}(\exp(3\pi i/2))$. Czy $\operatorname{Log}(zw) = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$?
Uwaga: Liczbę $\operatorname{Log} z$ nazywamy *logarytmem głównym* z.

59. Oblicz całki

$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z\,dz}{(1+z^2)\sin z}, \quad \int_\gamma \frac{\sin(z-2)\,dz}{z-2},$$

gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem o środku w $2+i$ i promieniu $\sqrt{2}$.

60. Niech $p, z_0 \in \mathbb{C}$ oraz $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{p\})$. Niech $C(z,r)$ oznacza dodatnio zorientowany okrąg o środku w z i promieniu r. Uzasadnij, że $\int_{C(p,r)} f(z)\,dz$ nie zależy od r, oraz że

$$\int_{C(z_0,r)} f(z)\,dz = \mathrm{Ind}_{C(z_0,r)}(p) \cdot \int_{C(p,r)} f(z)\,dz, \quad \text{dla } r \neq |z_0 - p|.$$

61. Obliczając $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ dla (odpowiednio sparametryzowanej) drogi zamkniętej γ, której obraz jest elipsą $\frac{(\operatorname{Re} z)^2}{a^2} + \frac{(\operatorname{Im} z)^2}{b^2} = 1$, uzasadnij, że

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

62. (*Lemat Jordana*) Niech $\beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq r_0, \operatorname{Im} z \geq \alpha\}$, $f \in C(D)$ oraz $f(z) \to 0$, gdy $|z| \to \infty$. Wówczas

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} e^{i\beta z} f(z)\, dz = 0,$$

gdzie γ_r jest tą częścią okręgu o środku w 0 i promieniu r, która znajduje się w D.

63. Oblicz całki

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-2i)}\, dz; \quad \int_\gamma \frac{\sin z}{z^2(z-2i)^3}\, dz,$$

gdzie γ jest dodatnio zorientowanym okręgiem (a) o środku w $3i$ i promieniu 2; (b) o środku w $-2i$ i promieniu 3.

64. Jeśli $f_n \in H(\Omega)$ jest ciągiem funkcji zbieżnym do funkcji f jednostajnie na każdym zwartym podzbiorze zbioru Ω, to $f \in H(\Omega)$.

65. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest otwarty, $f \in C([a,b]\times\Omega)$ oraz $f(t,\cdot) \in H(\Omega)$ dla każdego $t \in [a,b]$, to funkcja $g(z) = \int_a^b f(t,z)\, dt$ jest holomorficzna na Ω. *Wskazówka*: Twierdzenie Morery.

66. Uzasadnij, że podane funkcje są holomorficzne

$$f(z) = \int_{-1}^1 \frac{e^{tz}}{1+t^2}\, dt \quad \text{na } \mathbb{C}; \qquad g(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}\, dt \quad \text{na } \{z : \operatorname{Re} z > 0\};$$

$$h(z) = \int_0^\infty \frac{e^{tz}}{1+t^2}\, dt \quad \text{na } \{z : \operatorname{Re} z < 0\}.$$

67. Jeśli $f \in H(D(a,r))$ dla pewnego r, to a jest m–krotnym zerem funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{(m)}(a) = 0$ oraz $f^{(k)}(a) = 0$ dla $0 \leq k < m$.

68. Znajdź krotność zera $z = 0$ dla funkcji

$$f_1(z) = (e^{z^2}-1)z^2; \quad f_2(z) = 2\cos z^2 + z^4 - 2; \quad f_3(z) = e^{\sin z} - 1; \quad f_4(z) = \sin^{2014}(z^{100}).$$

69. Czy istnieje funkcja holomorficzna w otoczeniu 0 i taka, że (a) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$ dla $n \in \mathbb{N}$; (b) $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}$ dla $n \in \mathbb{N}$?

70. Funkcja $f(z) = \sin\frac{1}{z-1}$ ma ciąg zer zbieżny do 1, ale nie jest stała. Czy to nie sprzeczność z twierdzeniem o zerach?

71. Zbadaj, czy funkcja f ma funkcję pierwotną na Ω, jeśli

   (a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$, $\quad \Omega = D(0,1)$;

   (b) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$, $\quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D(0,1)}$;

   (c) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, $\quad \Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$.