

# am1

## Funkcje elementarne

1.  $y = f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ . Wyznacz  $x$ .

2.  $f(x) = 1 - 1/x$ . Znajdź  $f(f(f(x)))$ .

3.  $y = x^2 - 6x + 7 = (x - 3)^2 - 2$ .

Zapisz podobnie:  $y = x^2 - 4x + 13$ ,  $y = x^2 - 8x + 17$ .

4.  $y = \frac{3x+5}{x+1} = \frac{3(x+1)+2}{x+1} = 3 + \frac{2}{x+1}$ .

Zapisz podobnie:  $y = \frac{4x+5}{2x+3}$ ,  $y = \frac{6x+1}{3x+2}$ .

5. Korzystając ze wzorów:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

zapisz w innej postaci:

$$\cos 2a, \sin 2a, \cos^2 a, \sin^2 a, \cos a \cos b, \cos x + \cos y, \operatorname{tg}(a+b), \operatorname{tg} 2a.$$

6.  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ .

Zapisz w innej postaci:  $\cosh^2 x - \sinh^2 x$ ,  $\cosh(x+y)$ ,  $\sinh(x+y)$ ,  $\tanh(x+y)$ .

7. Naszkicuj wykresy i rozwiąż równania  $y = \sinh x$ ,  $y = \cosh x$ ,  $y = \tanh x$  ze względu na  $x$ .

## Monotoniczność i granice ciągów

8. Zbadaj monotoniczność ciągów:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \sqrt[3]{3^n - 1}, \sqrt[3]{3^n + 1}, n! \left(\frac{2}{n}\right)^n, n! \left(\frac{3}{n}\right)^n, \frac{5^n}{n!}, \left(\frac{2n}{n}\right) 4^{-n}.$$

9. Oblicz granice ciągów.

$$\begin{aligned} & \left(n + \frac{1}{n^2}\right)^3 - \left(n - \frac{1}{n^2}\right)^3, \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}, \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}, \frac{(2^n - 1)^2}{3^n + 4^n}, \\ & \sqrt{n^2 + 7n + 2} - \sqrt{n^2 + 3n + 1}, \frac{\sqrt{n+7} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n+3}}, \sqrt{4^n + 2^n + 1} - \sqrt{4^n - 2^n + 1}, \\ & \left(\frac{2n+3}{2n+5}\right)^{7n+1}, \frac{(n+2)^n - (n+1)^n}{(n+1)^n - n^n}, \frac{\sin n}{n}, \frac{n!}{n^n}, \sqrt[3]{2^n + 3^n + 5^n}, \sqrt[n]{\frac{4^n + 5^n}{3^n + 7^n}}. \end{aligned}$$

## Granice funkcji

10. Oblicz granice (postaraj się bez wzoru l'Hospitala)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}, \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x+4} - 3},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{\sin x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}.$$

11. Znajdź asymptoty funkcji

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2 + x + 1}, \quad g(x) = \sqrt{4x^2 + 12x + 10}, \quad h(x) = \ln(2 + 3e^{7x} + 5e^{-3x}).$$

12. Uzasadnij, że poniższe równania mają rozwiązania (zastosuj twierdzenie Bolzano).

$$3x = 2^x, \quad x + \cos x = 5.$$

## Pochodne funkcji

13. Pochodną funkcji  $f$  w punkcie  $x$  definiujemy wzorami

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Korzystając z podanych wzorów oblicz pochodne funkcji:

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = 1/x.$$

14. Oblicz pochodne funkcji:  $\sqrt[3]{x^5}$ ,  $\operatorname{tg} x$ ,  $(\sin x)e^x$ ,  $\sin x^2$ ,  $e^{-\cos x}$ .

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}.$$

15. Oblicz:  $(fg)''$ ,  $(fg)'''$ ,  $[(x^2-1)^3]'''$ ,  $(x^3e^{-x})'''$ ,  $(e^{-x^2})'''$ ,

16. Wykorzystując regułę l'Hospitala znajdź granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 2x - 2 \sin 3x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2},$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right).$$

17. Określ przedziały monotoniczności funkcji

$$f(x) = x^2e^{-x}, \quad g(x) = xe^{-x^2}, \quad h(x) = x^4 - 2x^2, \quad u(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

18. Znajdź wartości największe i najmniejsze funkcji:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 15 \text{ na przedziale } [0, 4].$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1} \text{ na przedziale } [1, 3].$$

19. Napisz równania stycznych do wykresu funkcji:

$$f(x) = x^2 \text{ w punkcie } (2, 4),$$

$$h(x) = 1/x \text{ w punkcie } (3, 1/3).$$

## Funkcje pierwotne czyli całki nieoznaczone

20. Znajdź całki

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3 dx, \quad \int \cos(3x+5) dx, \quad \int e^{7x+2} dx, \quad \int \sqrt[3]{x^5} dx, \quad \int \frac{x^2}{x+1} dx.$$

21. Zastosuj odpowiedni wzór trygonometryczny

$$\int \cos^2 x dx, \quad \int \sin^2 x dx, \quad \int \cos 3x \cos 5x dx, \quad \int \cos^3 x dx, \quad \int \frac{\sin 4x}{\sin x} dx.$$

22. Zastosuj wzór na całkowanie przez części

$$\int xe^x dx, \quad \int x \cos x dx, \quad \int \ln x dx, \quad \int \operatorname{arctg} x dx, \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

23. Licznik = pochodna mianownika (ostatnie zadanie nieco inne)

$$\int \operatorname{tg} x dx, \quad \int \frac{2x dx}{x^2+1}, \quad \int \frac{(2x+1) dx}{x^2+x+1}, \quad \int \frac{x^2+4x+7}{x^2+1} dx$$

24. Całkowanie funkcji wymiernych

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}.$$

25. Rozkład na ułamki proste

$$\int \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}, \quad \int \frac{dx}{6x^2 + 5x + 1}, \quad \int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}, \quad \int \frac{dx}{x^4 - 1}$$

26. Zamiana zmiennych

$$\int \cos x e^{\sin x} dx, \quad t = \sin x, \quad \int x^3 e^{x^2} dx, \quad t = x^2, \quad \int x \cos x^2 dx, \quad t = x^2,$$
$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{1 - \sin x}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}.$$

### Całki oznaczone

27. Oblicz całki oznaczone:  $\int_0^\pi \sin x dx$ ,  $\int_0^\pi \sin^2 x dx$ ,  $\int_{-1}^1 (1 - x^2)^2 dx$

28. Oblicz pole ograniczonego fragmentu płaszczyzny zawartego pomiędzy krzywymi:

- (i)  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ , (ii)  $y = 3/x$ ,  $x + y = 4$ , (iii)  $y = x^4$ ,  $y = 12 + x^2$ ,  
(iv)  $y = x^2 - x$ ,  $y = 2x$  (v)  $xy = 6$ ,  $3x + y = 9$ , (vi)  $y = (x + 3)^2$ ,  $y = 4x^2$