Rozwiązania zadań am 1

Monotoniczność ciągów

Zadanie 1

Sprawdź, czy ciąg $a_n = \sqrt{n+7} - \sqrt{n+2}$ jest monotoniczny.

Rozwiązanie

W wielu zadaniach z różnicą pierwiastków pomaga pomnożenie i podzielnie przez sprzężenie. Nie inaczej jest w tym zadaniu. Ani w tym miejscu, ani w dalszej części, nie będę pisał całego rachunku, którego schemat przedstawię przed właściwym rozwiązaniem

$$\sqrt{p} - \sqrt{q} = \frac{(\sqrt{p} - \sqrt{q})(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \frac{p-q}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}.$$

W przypadku pierwiastków trzeciego stopnia mamy

$$\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} = \frac{p-q}{\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}}.$$

Wracamy do zadania.

$$a_n = \sqrt{n+7} - \sqrt{n+2} = \frac{(n+7)-(n+2)}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n+2}} = \frac{5}{\sqrt{n+7} + \sqrt{n+2}}$$

i widać, że ciąg jest malejący (licznik jest stały, a mianownik rośnie wraz z n).

Zadanie 2

Wykazać monotoniczność ciągów: $a_n = \sqrt[n]{5^n+1}, \quad b_n = \sqrt[n]{5^n-1}$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy dwa fakty:

$$r > 1 \;\Rightarrow\; \sqrt[n+1]{r} < \sqrt[n]{r}.$$

$$0 < r < 1 \;\Rightarrow\; \sqrt[n+1]{r} > \sqrt[n]{r}.$$

Jak to uzasadnić? Zajmijmy się pierwszym faktem. Załóżmy, że jest odwrotnie, a mianowicie, że dla pewnego $r > 1$, $\sqrt[n+1]{r} \geq \sqrt[n]{r}$. Podnosząc obie strony do potęgi $n(n+1)$ otrzymujemy $r^n \geq r^{n+1}$, skąd $1 \geq r$ wbrew założeniu.

Podobnie dowodzimy drugi fakt. Dodam, że nie wymagam takich rozważań. Jesteśmy gotowi do rozwiązania zadania.

$$a_{n+1} = \sqrt[n+1]{5^{n+1}+1} = 5\sqrt[n+1]{1+5^{-n-1}}$$

$$< 5\sqrt[n]{1+5^{-n-1}} < 5\sqrt[n]{1+5^{-n}} = \sqrt[n]{5^n+1} = a_n.$$

$$b_{n+1} = \sqrt[n+1]{5^{n+1}-1} = 5\sqrt[n+1]{1-5^{-n-1}}$$

$$> 5\sqrt[n]{1-5^{-n-1}} > 5\sqrt[n]{1-5^{-n}} = \sqrt[n]{5^n+1} = b_n.$$

Odpowiedź. Ciąg a_n jest malejący, a ciąg b_n rosnący.

Zadanie 3

Zbadać monotoniczność ciągu $a_n = n/(n^2+1)$.

Rozwiązanie

W wielu przypadkach rachunek można zapisać w uporządkowany sposób badając różnicę kolejnych wyrazów ciągu.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n^2+2n+2} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)(n^2+1) - n(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}$$

$$= \frac{(n^3+n^2+n+1) - (n^3+2n^2+2n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} = \frac{-n^2-n+1}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} < 0, \quad n \geq 1.$$

Wniosek. Rozważany ciąg jest malejący.

Zadanie 4

Zbadać monotoniczność ciągu $a_n = n^2/2^n$.

Rozwiązanie

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} - \frac{n^2}{2^n} = \frac{(n+1)^2 - 2n^2}{2^{n+1}} = \frac{-n^2+2n+1}{2^{n+1}} = \frac{2-(n-1)^2}{2^{n+1}}.$$

Widzimy, że ciąg jest malejący począwszy od $n = 3$.

Zadanie 5

Zbadać monotoniczność ciągu $\binom{2n}{n}4^{-n}\sqrt{n}$.

Rozwiązanie

W zadaniach, w których występują potęgi i silnie, wygodnie jest badać iloraz kolejnych wyrazów ciągu.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad a_n = \binom{2n}{n}\frac{\sqrt{n}}{4^n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{\sqrt{n}}{4^n},$$

$$a_{n+1} = \binom{2n+2}{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{4\cdot 4^n},$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)\cdot(n+1)}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{4\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n^2+n+1/4}}{\sqrt{n^2+n}} > 1,$$

co oznacza, że ciąg jest rosnący.
Proszę zastanowić się nad ostatnią równością!

Zadanie 6

Na koniec coś łatwiejszego.
Zbadać monotoniczność ciągu $a_n = n!/n^n$.

Rozwiązanie

$$a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} < 1,$$

a więc mamy ciąg malejący.

Granice ciągów

Pewne granice uzasadniamy bezpośrednio z definicji:

$$1 \to 1, \quad 1/n \to 0, \quad 1/\sqrt{n} \to 0, \quad 1/\sqrt[3]{n} \to 0.$$

Wszystkie zadania proponowane studentom pwr można rozwiązać stosując dwa twierdzenia.

Twierdzenie o arytmetyce granic

Załóżmy, że $a_n \to a, \quad b_n \to b$. Wtedy

- $Ca_n \to Ca$
- $a_n + b_n \to a + b$
- $a_n b_n \to ab$
- $a_n/b_n \to a/b$, o ile $b_n \neq 0$ i $b \neq 0$
- $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$. Dla parzystych k trzeba założyć, że $a_n \geq 0$.

Twierdzenie o trzech ciągach

Jeśli $a_n \leq b_n \leq c_n$ i $a_n \to g, \ b_n \to g$, to $c_n \to g$.

Z Twierdzeń tych wynika, że

- Jeśli $a > 0$, to $\sqrt[n]{a} \to 1$
- $\sqrt[n]{n} \to 1$
- Jeśli $|p| < 1$, to $p^n \to 0$, ogólniej $n^k p^n \to 0$

Dowody tych trzech faktów są treścią zadań 21, 22, 23.
Dowodów tych nikt nie wymaga od studentów.
Dodatkowo dowodzi się, że ciąg $(1 + 1/n)^n$ jest zbieżny. Jego granicę oznacza się literą e. Wykorzystuje się też trochę ogólniejszy fakt: $(1 + a/n)^{bn} \to e^{ab}$.

Zadanie 7

Oblicz granicę ciągu $\dfrac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

Rozwiązanie

$$\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{6n^3 + 11n^2 + 6n + 1}{n^3 + 6n^2 + 11n + 6} = \frac{6 + 11/n + 6/n^2 + 1/n^2}{1 + 6/n + 11/n^2 + 6/n^3} \to 6.$$

Kluczowym przekształceniem jest podzielenie licznika i mianownika przez n^3.
W ostatnim kroku wielokrotnie stosujemy twierdzenie o arytmetyce granic.

Alternatywne rozwiązanie

$$\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(1+1/n)(2+1/n)(3+1/n)}{(1+1/n)(1+2/n)(1+3/n)} \to 6.$$

Zadanie 8

Oblicz granicę ciągu $\dfrac{2\cdot 3^n+7\cdot 5^n}{3\cdot 5^n+5\cdot 2^n}$.

Rozwiązanie

$$\frac{2\cdot 3^n+7\cdot 5^n}{3\cdot 5^n+5\cdot 2^n}=\frac{2\cdot(3/5)^n+7}{3+5\cdot(2/5)^n}\to 7/3.$$

Zadanie 9

Oblicz granicę ciągu $\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}$.

Rozwiązanie

Mnożymy i dzielimy przez sprzężenie (sprzężeniem sumy jest różnica i odwrotnie).

$$\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}=\frac{(n+7)-(n+3)}{\sqrt{n+7}-\sqrt{n+3}}=\frac{4}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+3}}\to 0.$$

Dlaczego zero?

$$\frac{4}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+3}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{4}{\sqrt{1+7/n}+\sqrt{1+3/n}}\to 0.$$

Można też powołać się na twierdzenie o trzech ciągach

$$0<\frac{4}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+3}}<\frac{2}{\sqrt{n}}\to 0.$$

Wydaje się jednak, że tłumaczenie można śmiało pominąć.

Zadanie 10

Oblicz granicę ciągu $\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{n+5}-\sqrt[3]{n+2}&=\frac{(n+5)-(n+2)}{\sqrt[3]{(n+5)^2}+\sqrt[3]{(n+5)(n+2)}+\sqrt[3]{(n+2)^2}}\\&=\frac{3}{\sqrt[3]{(n+5)^2}+\sqrt[3]{(n+5)(n+2)}+\sqrt[3]{(n+2)^2}}\to 0.\end{aligned}$$

Zadanie 11

Oblicz granicę ciągu $\sqrt{n^2+7n+3}-\sqrt{n^2+3n+1}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{n^2+7n+3}-\sqrt{n^2+3n+1}=\frac{(n^2+7n+3)-(n^2+3n+1)}{\sqrt{n^2+7n+3}+\sqrt{n^2+3n+1}}$$

$$=\frac{4n+2}{\sqrt{n^2+7n+3}+\sqrt{n^2+3n+1}}=\frac{4+2/n}{\sqrt{1+7/n+3/n^2}+\sqrt{1+3/n+/n^2}}\to 2.$$

Zadanie 12

Oblicz granicę ciągu $\sqrt{9^n+3^n+1}-\sqrt{9^n+2^n+1}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{9^n+3^n+1}-\sqrt{9^n+2^n+1}=\frac{(9^n+3^n+1)-(9^n+2^n+1)}{\sqrt{9^n+3^n+1}+\sqrt{9^n+2^n+1}}$$

$$=\frac{3^n-2^n}{\sqrt{9^n+3^n+1}+\sqrt{9^n+2^n+1}}=\frac{1-(2/3)^n}{\sqrt{1+1/3^n+1/9^n}+\sqrt{1+(2/9)^n+1/9^n}}\to 1/2.$$

Zadanie 13

Oblicz granicę ciągu $\dfrac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+3}-n}$.

Rozwiązanie

$$\sqrt{n^2+5}-n=\frac{(n^2+5)-n^2}{\sqrt{n^2+5}+n}=\frac{5}{\sqrt{n^2+5}+n},$$

$$\sqrt{n^2+3}-n=\frac{(n^2+3)-n^2}{\sqrt{n^2+3}+n}=\frac{3}{\sqrt{n^2+3}+n}.$$

Dlatego

$$\frac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+3}-n}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{n^2+3}+n}{\sqrt{n^2+5}+n}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{1+3/n^2}+1}{\sqrt{1+5/n^2}+1}\to 5/3.$$

Zadanie 14

Oblicz granicę ciągu $\left(\dfrac{3n+7}{3n+4}\right)^{5n+3}$.

Rozwiązanie

$$\left(\frac{3n+7}{3n+4}\right)^{5n+3}=\left(\frac{3n+7}{3n+4}\right)^{3}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{7}{3n}\right)^{5n}}{\left(1+\dfrac{4}{3n}\right)^{5n}}\to e^{5\cdot 7/3-5\cdot 4/3}=e^5.$$

Zadanie 15

Oblicz granicę ciągu $\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$.

Rozwiązanie

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e^{-1}\cdot e=1.$$

Elementarne rozwiązanie

Wykorzystujemy nierówność Bernouliego i twierdzenie o trzech ciągach.

$$1\geq\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\geq 1-\frac{1}{n}\to 1.$$

Zadanie 16

Oblicz granicę ciągu $\dfrac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{4}-1}$.

Za pierwsze 7 dobrych rozwiązań wpisuję + (dotyczy również drugiej grupy). Proszę pracować samodzielnie i nie odbierać szansy innym.

Zadanie 17

Oblicz granicę ciągu $\sqrt[n]{7^n+3^n}$.

Rozwiązanie

Typowe zadanie na twierdzenie o trzech ciągach.

$$7=\sqrt[n]{7^n}\leq\sqrt[n]{7^n+3^n}\leq\sqrt[n]{2\cdot 7^n}=7\sqrt[n]{2},$$

$$7\to 7,\quad 7\sqrt[n]{2}\to 7.\ \text{Dlatego}\ \ \sqrt[n]{7^n+3^n}\to 7.$$

Inne rozwiązanie

$$1<a\Rightarrow\sqrt[n]{a}<a.$$

$$7\leq\sqrt[n]{7^n+3^n}=7\sqrt[n]{1+(3/7)^n}\leq 7[1+(3/7)^n]\to 7.$$

Granicą jest liczba 7.

Zadanie 18

Oblicz granicę ciągu $\sqrt[n]{7^n-3^n}$.

Rozwiązanie

$$0<a<1\Rightarrow\sqrt[n]{a}>a.$$

$$7\geq\sqrt[n]{7^n-3^n}=7\sqrt[n]{1-(3/7)^n}\geq 7[1-(3/7)^n]\to 7.$$

Granicą jest liczba 7.

Zadanie 19

Oblicz granicę ciągu $\sqrt[n]{n^3+3^n}$.

Rozwiązanie

$$3=\sqrt[n]{3^n}\leq\sqrt[n]{n^3+3^n}\leq\sqrt[n]{2\cdot n^3\cdot 3^n}=3\sqrt[n]{2}(\sqrt[n]{n})^3\to 3.$$

Dlatego granicą jest liczba 3.

Zadanie 20

Oblicz granicę ciągu $\left(\dfrac{\cos n}{n}\right)^2$.

Rozwiązanie

$$0 \le \left(\frac{\cos n}{n}\right)^2 \le \frac{1}{n^2} \to 0, \quad \text{a więc granicą rozpatrywanego ciągu jest zero.}$$

Na zakończenie dowody trzech granic ze wstępu. W każdym dowodzie korzystamy z twierdzenia o trzech ciągach.

Zadanie 21

Udowodnij, że $n^2/2^n \to 0$.

Dowód

Dla $n \ge 3$ mamy

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} \ge \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$0 < n^2/2^n \le \frac{6n^2}{n(n-1)(n-2)} \to 0.$$

Zadanie 22

Udowodnij, że $\sqrt[n]{7} \to 1$.

Dowód

$$\text{średnia geometryczna } \le \text{ średnia arytmetyczna},$$

$$1 \le \sqrt[n]{7} = \sqrt[n]{7 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1} \le \frac{7+1+1+\cdots+1}{n} = \frac{7+n-1}{n} \to 1,$$

gdzie wstawiliśmy $n-1$ jedynek, aby mieć n elementów.

Zadanie 23

Udowodnij, że $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Dowód

$$\text{średnia geometryczna } \le \text{ średnia arytmetyczna},$$

$$1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1} \le \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + 1 + \cdots + 1}{n} = \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} \to 1,$$

gdzie wstawiliśmy $n-2$ jedynek, aby mieć n elementów.

Dwa ostatnie dowody można znaleźć w Wikipedii.

Wszystkie ciągi z zadań miały granice. Ciąg, który nie ma granicy jest nieograniczony lub posiada dwa podciągi zbieżne do różnych granic. Rozważa się też ciągi, które nie mają granicy, ale mają granice niewłaściwe. Ten temat też został pominięty.

Granice funkcji

Mówimy, że g jest granicą funkcji f w punkcie p, jeśli dla każdego ciągu x_n zbieżnego do p, o wyrazach różnych od p, granicą ciągu $f(x_n)$ jest g.

Piszemy: $f(x) \to g$ przy $x \to p$ lub $\lim_{x \to p} f(x) = g$.

Aby można było mówić o granicy w punkcie p, w dowolnie małej odległości od p powinien znaleźć się jakiś punkt dziedziny funkcji różny od p.

Obliczmy granicę funkcji $f(x) = 3x^3 + 5x + 7$ w punkcie p. Weźmy dowolny ciąg $x_n \to p$, $x_n \neq p$. Na podstawie twierdzenia o arytmetyce ciągów możemy napisać

$$f(x_n) = 3x_n^3 + 5x_n + 7 \to 2p^2 + 5p + 7.$$

Rachunek sugeruje, że w przypadku funkcji mamy odpowiednie twierdzenie o arytmetyce granic funkcji i twierdzenie o trzech funkcjach.

W rozważanym przykładzie $f(x) \to f(p)$. W takim przypadku mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie p. Jeśli tak jest w dowolnym punkcie dziedziny, to mówimy, że mamy funkcję ciągłą (tak jest w rozważanym przykładzie).

Funkcje elementarne są ciągłe.

Jak więc układane są zadania, aby nie było łatwo? Po prostu punkt, w którym szukamy granicy, leży poza dziedziną funkcji lub funkcja w takim punkcie definiowana jest w jakiś odmienny sposób. Bywa też, że funkcja po obu stronach rozważanego punktu definiowana jest innymi wzorami.

Zadanie 24

Oblicz granicę funkcji $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$ w punkcie 3.

Rozwiązanie

Nie możemy oczywiście podstawić $x = 3$ bo będziemy mieli dzielenie przez zero.

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x^2+3x+9}{x+3} \to 9/2 \quad \text{przy} \quad x \to 3.$$

Zadanie 25

Oblicz granicę $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+1}}{x}$.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+1}}{x} &= \frac{(5x+1) - (2x+1)}{x(\sqrt{5x+1} + \sqrt{2x+1})} \\ &= \frac{3}{\sqrt{5x+1} + \sqrt{2x+1}} \to 3/2 \quad \text{przy} \quad x \to 0. \end{aligned}$$

Zadanie 26

Oblicz granicę $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{1-x}$.

Za pierwsze 7 dobrych rozwiązań (bez Hospitala) wpisuję +.

Podobnie, jak w przypadku granic ciągów, studenci poznają kilka granic funkcji, które później mogą wykorzystywać w zadaniach.

- $\frac{\sin x}{x} \to 1$ przy $x \to 0$.
- $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ przy $x \to 0$.
- $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 1$ przy $x \to 0$.

Geometryczny dowód pierwszego faktu nie jest trudny, uzasadnienie pozostałych dwóch granic zwykle się pomija.

Zadanie 27

Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$.

Rozwiązanie

$$\frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3} = \frac{2\sin x - 2\sin x\cos x}{x^3} = 2\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{2}{1+\cos x} \to 1 \quad \text{przy } x\to 0.$$

Zadanie 28

Oblicz granicę $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$.

Rozwiązanie

Oj, tu chyba trzeba wykorzystać nieznaną nam nierówność: $e^t \geq 1+t$.

$$t = 1/x^2,\quad e^{1/x^2} \geq 1+1/x^2,\quad 0 < e^{-1/x^2} \leq \frac{1}{1+1/x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \to 0 \quad \text{przy} \quad x \to 0.$$

Z twierdzenia o trzech funkcjach wynika, że szukaną granicą jest zero.

Twierdzenie Bolzano

Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą określoną na przedziale $[a,b]$ oraz $f(a) < 0 < f(b)$. Wtedy $f(c) = 0$ dla pewnego $c \in (a,b)$.

Zadanie 29

Pokaż, że równanie $\cos x = x^2$ ma rozwiązanie.

Rozwiązanie

Rozpatrujemy funkcję $f(x) = x^2 - \cos x$, Funkcja f jest ciągła, $f(0) = -1 < 0,\ f(\pi/2) = (\pi/2)^2 > 0$. Zatem $f(x) = 0$ dla pewnego $x \in (0, \pi/2)$, co oznacza, że równanie $\cos x = x^2$ ma rozwiązanie, a nawet więcej: jedno z rozwiązań należy do przedziału $(0, \pi/2)$.

Asymptoty funkcji

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą funkcji w ∞, jeśli $f(x) - ax - b \to 0$ przy $x \to \infty$.

Podobnie definiujemy asymptotę w $-\infty$.
Mamy jeszcze asymptoty pionowe, o których tu jednak nie będę pisał.
Parametry a, b asymptoty w ∞ możemy znaleźć obliczając granice

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax].$$

Podobnie znajdujemy parametry asymptoty w $-\infty$.
Funkcja może nie mieć asymptot.

Zadanie 30

Wyznacz asymptoty funkcji $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2}{x^2 + 2x + 2}$.

Rozwiązanie

Wystarczy wykonać dzielenie wielomianów.

$$\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 + 2x + 2} = x + 3 - \frac{8x + 6}{x^2 + x + 2}, \quad \frac{8x + 6}{x^2 + x + 2} \to 0 \ \text{ przy } \ x \to \pm\infty.$$

Dlatego asymptotą funkcji f w $+\infty$ i w $-\infty$ jest prosta $y = x + 3$.

Rozwiązanie standardowe

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2}{x(x^2 + 2x + 2)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^3 + 5x^2}{x^2 + 2x + 2} - x \right] = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x}{x^2 + 2x + 5} = 3.$$

Dlatego asymptotą funkcji f w ∞ jest prosta $y = x + 3$. Podobnie znajdujemy asymptotę w $-\infty$.

Zadanie 31

Wyznacz asymptoty funkcji $f(x) = \tanh x$.

Rozwiązanie

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to 1 \ \text{ przy } \ x \to \infty.$$

Oznacza to, że $y = 1$ jest asymptotą funkcji f w $+\infty$.
Podobnie, $y = -1$ jest asymptotą funkcji f w $-\infty$.

Zadanie 32

Wyznacz asymptoty funkcji $f(x) = \ln \cosh x$.

Rozwiązanie

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \ln e^x(1 + e^{-2x})/2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}),$$

$$\ln(1 + e^{-2x}) \to 0 \quad \text{przy} \quad x \to \infty.$$

Dlatego prosta $y = x - \ln 2$ jest asymptotą funkcji f w $+\infty$.

$$f(x) = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \ln e^{-x}(1 + e^{2x})/2 = -x - \ln 2 + \ln(1 + e^{2x}),$$

$$\ln(1 + e^{2x}) \to 0 \quad \text{przy} \quad x \to -\infty.$$

Dlatego prosta $y = -x - \ln 2$ jest asymptotą funkcji f w $-\infty$.

Zadanie 33

Wyznacz asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt{9x^2 + 30x + 29}$.

Rozwiązanie

$9x^2+30x+29 = (3x+5)^2+4$, co sugeruje, że asymptotą w $+\infty$ jest prosta $y = 3x+5$. Faktycznie

$$\sqrt{9x^2 + 30x + 29} - (3x + 5) = \frac{4}{\sqrt{9x^2 + 30x + 29} + 3x + 5} \to 0 \quad \text{przy} \quad x \to \infty.$$

Podobnie możemy sprawdzić, że asymptotą w $-\infty$ jest prosta $y = -x - 3$. Oczywiście, parametry asymptot możemy znaleźć obliczając odpowiednie granice.

Zadanie 34

Wyznacz asymptoty funkcji $f(x) = \ln(2 + 3e^{4x} + 5e^{-7x})$.

Rozwiązanie

Wykonamy operację, którą studenci lubią najbardziej, czyli wyciąganie.

$$f(x) = \ln(2 + 3e^{4x} + 5e^{-7x}) = \ln 3e^{4x}[(2/3)e^{-4x} + 1 + (5/3)e^{-11x}]$$

$$= 4x + \ln 3 + \ln[(2/3)e^{-4x} + 1 + (5/3)e^{-11x}],$$

$$(2/3)e^{-4x} + 1 + (5/3)e^{-11x} \to 1 \quad \text{przy} \quad x \to \infty,$$

$$\ln[(2/3)e^{-4x} + 1 + (5/3)e^{-11x}] \to 0 \quad \text{przy} \quad x \to \infty.$$

Dlatego asymptotą funkcji f w $+\infty$ jest prosta $y = 4x + \ln 3$.

$$f(x) = \ln(2 + 3e^{4x} + 5e^{-7x}) = \ln 5e^{-7x}[(2/5)e^{7x} + (3/5)e^{11x} + 1]$$

$$= -7x + \ln 5 + \ln[(2/5)e^{7x} + (3/5)e^{11x} + 1],$$

$$\ln[(2/5)e^{7x} + (3/5)e^{11x} + 1] \to 0 \quad \text{przy} \quad x \to \infty.$$

Dlatego asymptotą funkcji f w $-\infty$ jest prosta $y = -7x + \ln 5$.

Pominięte tematy: asymptoty pionowe i granice niewłaściwe funkcji.

Pochodne

Zakładamy, że funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x. Pochodną funkcji f w punkcie x definiujemy równoważnymi wzorami

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

o ile te granice istnieją.

Jeśli funkcja f ma pochodną w punkcie x, to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x. O funkcji różniczkowalnej w każdym punkcie dziedziny mówimy, że jest różniczkowalna.

Pochodną funkcji stałej jest zero, pochodną funkcji $f(x) = ax + b$ jest a.

Zadanie 35

Oblicz bezpośrednio z definicji pochodną funkcji $f(x) = x^5$.

Rozwiązanie

Pochodną policzymy korzystając najpierw z pierwszego wzoru, a potem z drugiego. Wzory są równoważne, jednak podpowiadają inny sposób liczenia.

$$(x^5)' = \lim_{t\to x} \frac{t^5 - x^5}{t - x} = \lim_{t\to x}(t^4 + t^3x + t^2x^2 + tx^3 + x^4) = 5x^4,$$

$$(x^5)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^5 - x^5}{h} = \lim_{h\to 0}(5x^4 + 10x^3h + 10x^2h^2 + 5xh^3 + h^4) = 5x^4.$$

Zadanie 36

Oblicz bezpośrednio z definicji pochodną funkcji $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Rozwiązanie

$$(\sqrt[3]{x})' = \lim_{t\to x} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{1}{\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{tx} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Zadanie 37

Oblicz bezpośrednio z definicji pochodną funkcji $f(x) = \sin x$.

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru

$$\sin a - \sin b = 2 \cdot \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}.$$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 \cdot \sin(h/2) \cdot \cos(x + h/2)}{h} = \cos x.$$

Zadanie 38

Oblicz bezpośrednio z definicji pochodną funkcji $f(x) = e^x$.

Rozwiązanie

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

gdzie skorzystaliśmy z nieudowodnionego faktu podanego wcześniej.

Twierdzenie

Funkcja f różniczkowalna w punkcie x jest ciągła w punkcie x.

Dowód

$$f(t) = f(x) + (x-t) \cdot \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \to f(x) + 0 \cdot f'(x) = f(x) \quad \text{przy} \quad t \to x.$$

Podstawowe pochodne

- $(x^a)' = ax^{a-1}$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln x)' = 1/x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

:

Podstawowe wzory

- $(Cf)' = Cf'$, C oznacza stałą
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$
- $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Powyższe pochodne i wzory ogólne pozwalają obliczyć pochodną dowolnej funkcji elementarnej.

Dwa dowody

Dla czytelności wzory napisałem bez wpisywania argumentów funkcji i bez koniecznego komentarza. Dla przykładu podam pełne sformułowanie oraz dowody dwóch podpunktów.

Jeśli funkcje f i g są różniczkowalne w punkcie x, to funkcje: $f+g$ i fg są różniczkowalne w puncie x oraz zachodzą równości:

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \quad [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dowody.

$$\frac{[f(t) + g(t)] - [f(x) + g(x)]}{t - x} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} + \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \to f'(x) + g'(x) \ \text{przy} \ t \to x.$$

$$\frac{f(t)g(t) - f(x)g(x)}{t - x}$$

$$= \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \cdot g(t) + f(t) \cdot \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \to f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{przy} \quad t \to x.$$

Zadanie 39

Oblicz pochodne funkcji $y = \sqrt[3]{x^2}$, $y = (\sin x + \cos x)e^x$, $y = x/(1 + x^2)$.

Rozwiązanie

$$(x^2\sqrt{x})' = (x^{5/2})' = (5/2)x^{3/2} = (5/2)x\sqrt{x},$$
$$[(\sin x + \cos x)e^x]' = (\cos x - \sin x)e^x + (\sin x + \cos x)e^x = 2(\cos x)e^x,$$
$$[x/(1 + x^2)]' = [(1 + x^2) - x(2x)]/(1 + x^2)^2 = (1 - x^2)/(1 + x^2)^2.$$

Zadanie 40

Oblicz pochodne funkcji $y = \ln(1 + x^2)$, $y = \sin e^{x^2}$.

Rozwiązanie

$$[\ln(1 + x^2)]' = \frac{1}{1 + x^2} \cdot (1 + x^2)' = \frac{2x}{1 + x^2}.$$
$$[\sin e^{x^2}]' = (\cos e^{x^2})(e^{x^2})' = (\cos e^{x^2})e^{x^2}(x^2)' = 2x(\cos e^{x^2})e^{x^2}.$$

Być może różniczkowanie (znajdowanie pochodnej) funkcji złożonej jest najtrudniejszą rzeczą przy różniczkowaniu. Jak ktoś potrzebuje, może użyć dodatkowej litery

$$[f(g(x))]' = f'(y)g'(x), \quad \text{gdzie} \quad y = g(x),$$

Przykład

$$e^{\sin x} = f(g(x)), \quad f(y) = e^y, \quad y = g(x) = \sin x, \quad f'(y) = e^y, \quad g'(x) = \cos x,$$
$$(e^{\sin x})' = e^y \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

Zadanie 41

Znajdź pochodną funkcji $f(x) = \ln x$ zakładając, że funkcja ta jest różniczkowalna.

Rozwiązanie

O istnieniu pochodnej mówi odpowiednie twierdzenie, nie chciałbym jednak rozszerzać i tak przydługiej teorii.

$$x = e^{\ln x}, \quad 1 = x' = [e^{\ln x}]' = e^{\ln x}(\ln x)', \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Zadanie 42

Znajdź pochodną funkcji $f(x) = \arctan x$ zakładając, że funkcja ta jest różniczkowalna.

Rozwiązanie

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x,$$
$$x = \tan(\arctan x), \quad 1 = [1 + \tan^2(\arctan x)](\arctan x)', \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Zadanie 43

Znajdź pochodną funkcji $f(x) = \arcsin x$ zakładając, że funkcja ta jest różniczkowalna.

Rozwiązanie

$$x = \sin(\arcsin x), \quad 1 = \cos((\arcsin x)(\arcsin x)', \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Styczne

Spójrzmy na wykres funkcji różniczkowalnej f.
Prosta przechodząca przez dwa różne punkty $(p, f(p)), (t, f(t))$ opisana jest wzorem

$$y = \frac{f(t) - f(p)}{t - p}(x - p) + f(p).$$

W granicy $t \to p$ uzyskujemy prostą zwaną styczną

$$y = f'(p)(x - p) + f(p).$$

Zadanie 44

Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie (2,8).

Rozwiązanie

$$f(x) = x^3, \quad f'(x) = 3x^2, \quad f(2) = 8, \quad f'(2) = 12, \quad \text{styczna: } y = 12(x-2) + 8.$$

Zadanie 45

Styczna do hiperboli $xy = 1$ w punkcie $(p, 1/p)$, $p > 0$, wycina z pierwszej ćwiartki układu współrzędnych pewien trójkąt. Oblicz jego pole.

Rozwiązanie

$$f(x) = 1/x, \quad \text{styczna: } y = -\frac{1}{p^2}(x-p) + \frac{1}{p} = -\frac{x}{p^2} + \frac{2}{p}.$$

Styczna przecina osie współrzędnych w punktach: $(0, 2/p)$, $(2p, 0)$. Dlatego szukane pole równe jest 2. Ciekawostką jest, że pole nie zależy od wyboru punktu styczności.

Zadanie 46

Znajdź punkt przecięcia stycznych do paraboli $y = x^2$ w punktach (a, a^2), (b, b^2). Zakładamy, że $a < b$.

Rozwiązanie

$$f(x) = x^2, \quad f'(x) = 2x.$$

Równania stycznych:

$$y = 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2, \quad y = 2bx - b^2.$$

Punkt przecięcia stycznych:

$$2ax - a^2 = 2bx - b^2, \quad b^2 - a^2 = 2(b-a)x, \quad x = \frac{a+b}{2}, \quad y = ab.$$

Zadanie 47

Wyznacz styczne do paraboli $y = x^2$ przechodzące przez punkt (4,15).

Rozwiązanie

Styczna w punkcie (p, p^2) opisana jest równaniem $y = 2px - p^2$.
Dla jakich wartości p punkt (4,15) leży na prostej $y = 2px - p^2$?

$$15 = 2p \cdot 4 - p^2, \quad p^2 - 8p + 15 = 0, \quad p = 3 \ \text{ lub } \quad p = 5.$$

Równia stycznych:

$$y = 6x - 9, \quad y = 10x - 26.$$

Twierdzenie o wartości średniej

Jeśli w otoczeniu punku x funkcja przyjmuje wartości nie mniejsze od wartości w punkcie x, to powiemy, że w punkcie x funkcja ma minimum lokalne.
Podobnie definiujemy maksimum lokalne.
Minima i maksima lokalne nazywa się ekstremami lokalnymi.

Twierdzenie

Jeśli funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu x i różniczkowalna w punkcie x ma ekstremum lokalne w punkcie x, to $f'(x) = 0$.

Dowód

Przyjmijmy, że rozważane ekstremum, to minimum. Dla maksimum dowód jest podobny. Dla odpowiednio małych h mamy $f(x+h) \geq f(x)$, a więc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \ \text{ dla } \ h > 0, \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq 0 \ \text{ dla } \ h < 0.$$

Wynika stąd, że granica prawostronna jest nieujemna, a lewostronna niedodatnia. Wiemy, że granica istnieje, zatem musi być równa zero.

Uwaga

Podobnie możemy pokazać, że funkcja rosnąca (niemalejąca) ma nieujemną pochodną, a funkcja malejąca (nierosnąca) niedodatnią.

Twierdzenie Weierstrassa

Funkcja ciągła określona na przedziale domkniętym jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.

Gdzie wśród zadań umieścić dowód tego wspaniałego twierdzenia?

Twierdzenie Rolla

Jeśli funkcja ciągła f na odcinku $[a, b]$ jest jest różniczkowalna na odcinku (a, b) i $f(a) = f(b)$, to $f'(c) = 0$ dla pewnego c z odcinka (a, b).

Dowód

Jeśli funkcja jest stała, to w każdym punkcie odcinka (a, b) ma pochodną równą zero. W przeciwnym razie, gdzieś pomiędzy a i b funkcja przyjmuje wartość największą bądź najmniejszą (to wynika z twierdzenia Weierstassa). W każdym przypadku pochodna w takim miejscu równa jest zero.

Twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej

Jeśli funkcja ciągła f na odcinku $[a, b]$ jest różniczkowalna na odcinku (a, b), to $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) = 0$ dla pewnego c z odcinka (a, b).

Dowód

Rozważmy funkcję

$h(x) = [f(x) - f(a)](b - a) + [f(b) - f(a)](b - x), \quad h(a) = h(b) = [f(b) - f(b)](b - a).$

Dlatego dla pewnego c z odcinka (a, b)

$$0 = h'(c) = f'(c)(b - a) - [f(b) - f(a)], \text{ czyli } f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Wnioski

Zakładamy, że funkcja f jest określona i różniczkowalna na pewnym przedziale.

- Jeśli $f'(x) = 0$ dla każdego x, to funkcja f jest stała
- Jeśli $f'(x) > 0$ dla każdego x, to funkcja f jest rosnąca
- Jeśli $f'(x) < 0$ dla każdego x, to funkcja f jest malejąca

Dowód

$$f'(x) = 0, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) = 0, \quad f(b) = f(a),$$
$$f'(x) > 0, \quad a < b, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) > 0, \quad f(b) > f(a),$$
$$f'(x) < 0, \quad a < b, \quad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) < 0, \quad f(b) < f(a).$$

I to jest podstawa do badania monotoniczności funkcji przy pomocy pochodnych.

Zadanie 48

Określ przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 - 3x$.

Rozwiązanie

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1), \quad f'(x) = 0 \text{ dla } x = \pm 1,$$
$$f'(x) > 0 \text{ dla } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x \in (-1, 1).$$

Funkcja rośnie na przedziałach: $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$, a maleje na przedziale $[-1, 1]$. W punkcie 1 funkcja ma minimum lokalne, a w punkcie -1 maksimum lokalne.

Zadanie 49

Znajdź największą wartość funkcji $f(x) = x^{1/x}, \quad x > 0$.

Rozwiązanie

$$f(x) = x^{1/x} = e^{\,h(x)}, \quad h(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$
$$h'(e) = 0, \quad h'(x) > 0 \text{ dla } x < e, \quad h'(x) < 0 \text{ dla } x < e,$$
$$h(x) \le h(e) = 1/e, \quad f(x) \le f(e), \quad x^{1/x} \le e^{1/e}.$$

Wynika stąd, że $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \cdots$, co można jednak wykazać zupełnie elementarnie. Dodam, że $1 < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

Zadanie 50

Wykaż, że $e^x \geq 1 + x$.

Dowód

Rozważamy funkcję $f(x) = e^x - 1 - x$.

$$f'(x) = e^x - 1, \quad f'(0) = 0, \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x < 0, \quad f'(x) > 0 \text{ dla } x > 0.$$

Wniosek: funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w punkcje $x = 0$, czyli

$$f(x) \geq f(0), \quad e^x - x - 1 \geq 0, \quad e^x \geq 1 + x.$$

Zadanie 51

Wykaż, że $\ln x \leq x - 1$ dla $x > 0$.

Dowód

Rozważamy funkcję $f(x) = \ln x - x + 1$.

$$f'(x) = 1/x - 1, \quad f'(1) = 0, \quad f'(x) > 0, \text{ jeśli } 0 < x < 1, \quad f'(x) < 0 \text{ dla } x > 1.$$

Wniosek: funkcja przyjmuje wartość największą w punkcje $x = 1$, czyli

$$f(x) \leq f(1), \quad \ln x - x + 1 \leq 0, \quad \ln x \leq x - 1.$$

Dwa następne zadania będą nieco trudniejsze.

Zadanie 52

Pokaż, że $x^5 e^{-x} \to 0$ przy $x \to \infty$.

Dowód

$$x > 0, \quad e^x \geq 1 + x, \quad e^{x/n} \geq 1 + x/n, \quad e^x \geq (1 + x/n)^n.$$

Założenie $x > 0$ wykorzystaliśmy w ostatnim kroku, gdy podnosiliśmy obie strony nierówności do n-tej potęgi.

$$0 < x^5 e^{-x} \leq \frac{x^5}{(1 + x/6)^6} \to 0 \text{ przy } x \to \infty.$$

Zadanie 53

Pokaż, że $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ przy $x \to \infty$.

Dowód

$$x > 1, \quad \ln x \leq x - 1 < x, \quad \frac{\ln x}{2} = \ln \sqrt{x} < \sqrt{x}, \quad 0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0 \text{ przy } x \to \infty.$$

Zadanie 54

Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ na odcinku [-1,2].

Rozwiązanie

Rozważana funkcja jest ciągła, więc zgodnie z twierdzeniem Weierstassa powinna w pewnym punkcie odcinka [-1,2] przyjmować wartość największą. Może się to zdarzyć na końcu odcinka lub wewnątrz odcinka. W tym drugim przypadku w takim punkcie pochodna będzie równa zero. Podobnie będzie z wartością najmniejszą. Wystarczy więc porównać wartości na końcach odcinka oraz w punktach, w których pochodna przyjmuje wartość zero.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3, \quad f'(x) = 12x^2(x-1).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \;\text{ lub }\; x = 1.$$

$$f(-1) = 7,\; f(0) = 0,\; f(1) = -1,\; f(2) = 16.$$

Najmniejszą wartością funkcji f na odcinku [-1,2] jest -1, a największą 16.

Wzór l'Hospitala

Niech f, g będą funkcjami różniczkowalnym, $g'(x) \neq 0$, dla $x \neq a$,

$$\text{Jeśli } f(x) \to 0, \quad g(x) \to 0, \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to g, \quad \text{przy} \quad x \to p,$$

$$\text{to} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \to g, \quad \text{przy} \quad x \to p.$$

Twierdzenie można sformułować ogólniej, czego tu nie będę robił. Dowód twierdzenia opiera się na niewielkim uogólnieniu twierdzenia o wartości średniej.

Zadanie 55

Znajdź granicę wyrażenia $\dfrac{x^5 - 5x + 4}{x^3 - 3x + 2}$ w punkcie $x = 1$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 5x + 4}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^5 - 5x + 4)'}{(x^3 - 3x + 2)'}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{5x^4 - 5}{3x^2 - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(5x^4 - 5)'}{(3x^2 - 3)'} = \lim_{x \to 1} \frac{5 \cdot 4x^3}{3 \cdot 2x} = \frac{10}{3}.$$

Właściwie rozwiązanie powinno być napisane w odwrotnej kolejności. Podobnie jest prawie zawsze, gdy używamy symbolu lim. Po prostu zwykle dopiero na końcu okazuje się, że wcześniejsze kroki miały jakiś sens.

Zadanie 56

Znajdź granicę wyrażenia $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ w punkcie $x = 0$.

Rozwiązanie

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{xe^x - x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{xe^x + 2e^x} = 1/2.$$

Tematy zadań zostały skorelowane z zadaniami na liście zadań, więc pewne ciekawsze zadania zostały tu pominięte.

Funkcje pierwotne

Funkcję F taką, że $F' = f$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji f.

Zauważmy, że jeśli $F' = f$ i C jest jakąś stałą, to $(F + C)' = f$.
Odwrotnie, jeśli $F' = G'$ na pewnym przedziale, to $G = F + C$ dla pewnej stałej C.

Synonimem funkcji pierwotnej jest całka nieoznaczona: $F(x) = \int f(x)\,dx$.
Uwaga. Niektórzy autorzy piszą $\int f(x)dx = F(x) + C$, podkreślając fakt, że dodanie stałej do funkcji pierwotnej daje również funkcje pierwotną. Przyjmujemy, że równość, w której występuje symbol całki to równość z dokładnością do stałej.

Można pokazać, że każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną.

Całkowanie jest operacją odwrotną do różniczkowania, nie jest jednak czynnością opisaną prostym algorytmem, co więcej, zdarza się, że całki z prostych funkcji elementarnych nie wyrażają się przez funkcje elementarne.

Podstawowe wzory

$$\int Kf(x)\,dx = K\int f(x)\,dx, \qquad \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Ten drugi wzór powinniśmy poprzedzić stwierdzeniem: suma dwóch funkcji całkowalnych (czyli takich, dla których istnieje funkcja pierwotna) jest całkowalna i zachodzi równość .... Będę jednak pomijał podobne założenia. Wynik całkowania zawsze można sprawdzić przez różniczkowanie.

Tabela podstawowych całek (tabela odwrotna do tabeli podstawowych pochodnych).

- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$
- $\int e^x\,dx = e^x + C$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Zadanie 57

Oblicz całki nieoznaczone: $\int (5x^2 + 3x + 7)dx$, $\int \sqrt[3]{x^5}\,dx$, $\int (1 - \sqrt{x})^3\,dx$.

Rozwiązanie

$$\int (5x^2 + 3x + 7)dx = 5\int x^2\,dx + 3\int x\,dx + 7\int dx = \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 7x + C.$$

Jeśli całkujesz tak proste wyrażenie, nie rozpisuj w ten sposób. Rozwiązanie traci na przejrzystości, a pisząc więcej łatwo się pomylić.

$$\int \sqrt[3]{x^5}\, dx = \int x^{5/3}\, dx = ?x^{8/3} = \frac{3}{8}x^{8/3} + C.$$

Zostawiamy trochę miejsca przed x. W pamięci dodajemy jeden do wykładnika, a potem w wolne miejsce wpisujemy odwrotność powiększonego wykładnika.

$$\int (1-\sqrt[3]{x})^3\, dx = \int (1-3x^{1/3}+3x^{2/3}-x)dx = x - \frac{9}{4}x^{4/3} + \frac{9}{5}x^{5/3} - \frac{1}{2}x^2.$$

Dobrze jest na koniec zróżniczkować wynik, aby przekonać się, czy nie ma błędu. W ostatnim przykładzie pominąłem C. Dalej też nie będę pisał, ale pamiętaj, niektórzy wymagają pisania C.

Zadanie 58

Oblicz całkę nieoznaczoną $\displaystyle\int \frac{x^4}{1+x^2}\, dx$.

Rozwiązanie

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$

W trudniejszych zadaniach funkcję podcałkową lepiej przekształcić na boku.

$$\int \frac{x^4\, dx}{1+x^2} = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - x + \arctan x.$$

Zadanie 59

Oblicz całki nieoznaczone: $\int \sin(x+7)\, dx$, $\int \cos(3x+5)\, dx$.

Rozwiązanie

$$\int \sin(x+7)\, dx = -\cos(x+7), \qquad \int \cos(3x+5)\, dx = \frac{1}{3}\cos(3x+5).$$

Zauważ, że jeśli $\int f(x)\, dx = F(x)$ i $a \neq 0$, to $\int f(ax+b)\, dx = F(ax+b)/a$.

Zadanie 60

Oblicz całki nieoznaczone: $\int \cos 2x \cdot \cos 7x\, dx$, $\int (\cos x)^3\, dx$.

Rozwiązanie

Wykorzystujemy wzory trygonometryczne

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)], \quad (\cos x)^3 = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

Drugi wzór można uzyskać wykorzystując liczby zespolone: $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$. Teraz jest łatwo.

$$\int \cos 2x \cdot \cos 7x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 9x + \cos 5x)dx = \frac{1}{19}\sin 9x + \frac{1}{10}\sin 5x,$$

$$\int (\cos x)^3\, dx = \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x.$$

W dalszej części poznamy inny sposób na tą całkę.

Zadanie 61

Oblicz całki nieoznaczone: $\int \frac{dx}{x^2+8x+17}$, $\int \frac{dx}{x^2+6x+16}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$.

Rozwiązanie

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+17} = \int \frac{dx}{(x+4)^2+1} = \arctan(x+4).$$

Przed obliczeniem drugiej całki znajdziemy ogólny wzór.

$$a \neq 0, \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(x/a)^2+1} = \frac{1}{a^2}\cdot a \cdot \arctan\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\cdot \arctan\frac{x}{a}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x/2-1)^2}} = \arcsin(x/2-1).$$

Zadanie 62

Oblicz całki nieoznaczone: $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$, $\int \tan x\,dx$.

Rozwiązanie

Rozwiązania opierają się na prostym spostrzeżeniu:

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C.$$

$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$
$$= \arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|.$$

Całkowanie funkcji wymiernych

Kilka wcześniejszych przykładów uzupełnię przykładami wymagającymi rozkładu na ułamki proste.

Zadanie 63

Oblicz całki nieoznaczone: $\int \frac{dx}{x^2+10x+21}$, $\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}$.

Rozwiązanie

W tych dwóch przykładach rozkład na ułamki proste jest oczywisty.
W trudniejszych przypadkach musimy przypomnieć sobie wiedzę z algebry.

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+21} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+7}\right)dx = \frac{1}{4}(\ln|x+3| - \ln|x+7|).$$

$$\int \frac{dx}{x^4+5x^2+4} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{3}\arctan x - \frac{1}{6}\arctan\frac{x}{2}.$$

Nadal jednak nie potrafimy obliczyć całki $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Zamiana zmiennych

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)), \quad \text{gdzie} \quad F(y) = \int f(y)dy.$$

Aby sprawdzić, wystarczy zróżniczkować.

Zadanie 64

Oblicz całki nieoznaczone: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x}.$

Rozwiązanie

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{1 - \sin^2 x}\, dx.$$

Rozpoznajemy wyrażenie po lewej stronie wzoru na podstawianie.

$$y = \sin x, \qquad \int \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y}, \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}.$$

A co z drugą całką? Wystarczy pamiętać wzór na pochodną tangensa.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x.$$

Zadanie 65

Oblicz całki nieoznaczone: $\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh x}, \quad \int \frac{dx}{\cosh^2 x}.$

Rozwiązanie

$$\int \frac{dx}{\cosh x} = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} dx = \int \frac{(\sinh x)'}{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int \frac{dy}{1 + y^2} = \arctan y = \arctan \sinh x,$$

gdzie oczywiście podstawiliśmy $y = \sinh x$.

Wynik drugiej całki odgadujemy i sprawdzamy.

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x.$$

Zadanie 66

Oblicz całkę nieoznaczone: $\int \cos^5 x\, dx$.

Rozwiązanie

$$y = \sin x, \qquad \int \cos^5 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 (\sin x)' dx = \int (1 - y^2)^2 dy$$
$$= y - \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{5} y^5 = \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x.$$

To jest ten inny sposób na całkę z $\cos^3 x$.

Zadanie 67

Oblicz całkę nieoznaczoną: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$

Rozwiązanie

Tym razem wzór na całkowanie przez podstawienie wykorzystamy w odwrotnym kierunku. Trudność sprawia pierwiastek, którego możemy się pozbyć wstawiając w miejsce x odpowiednio dobraną funkcję. Mamy różne możliwości. Można na przykład tak:

$$x = \sinh t, \quad \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\sinh^2 t} = \cosh t, \quad (\sinh t)' = \cosh t,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int 1 dt = t = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Prawdopodobnie najtrudniejszy jest ostatni krok, czyli odwrócenie funkcji $x = \sinh t$.

Całkowanie przez części

Całkując wzór $(fg)' = f'g + fg'$ dostajemy wzór na całkowanie przez części.

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx.$$

Dla zwiększenia czytelności pominąłem argumenty funkcji.

Zadanie 68

Oblicz całką nieoznaczoną: $\int xe^x \, dx$.

Rozwiązanie

Jest to typowy przykład, gdzie wykorzystuje się wzór na całkowanie przez części.

$$\int xe^x \, dx = \int x(e^x)' \, dx = xe^x - \int x' e^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x.$$

Tabela całek, które liczy się całkując przez części (być może wielokrotnie).

- $\int x^n e^{kx} \, dx, \quad \int x^n \cos kx \, dx, \quad \int x^n \sin kx \, dx \quad k \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
- $\int x^k (\ln x)^n \, dx, \quad k \neq -1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
- $\int x^n \ \arctan x, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Zadanie 69

Oblicz całkę nieoznaczoną: $\int (\cos ax) e^{bx} \, dx, \quad a, b \neq 0.$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned}
\int (\cos ax) e^{bx} \, dx &= \frac{1}{b} \int (\cos ax)(e^{bx})' \, dx = \frac{1}{b} (\cos ax) e^{bx} + \frac{a}{b} \int (\sin ax) e^{bx} \, dx \\
&= \frac{1}{b} (\cos ax) e^{bx} + \frac{a}{b^2} \int (\sin ax)(e^{bx})' \, dx \\
&= \frac{1}{b} (\cos ax) e^{bx} + \frac{a}{b^2} (\sin ax) e^{bx} - \frac{a^2}{b^2} \int (\cos ax) e^{bx} \, dx.
\end{aligned}$$

Szukana całka występuje po obu stronach równości. Wyznaczamy ją w oczywisty sposób.

$$\int (\cos ax) e^{bx} \, dx = \frac{b \cos ax + a \sin ax}{a^2 + b^2} \ e^{bx}.$$

Rozwiązanie z wykorzystaniem liczb zespolonych

Wykorzystamy wzór $e^{iax} = \cos ax + i \sin ax$.

$$\int (\cos ax) e^{bx}\, dx + i \int (\sin ax) e^{bx}\, dx = \int e^{(ia+b)x} dx = \frac{e^{(ia+b)x}}{ia+b}$$

$$= \frac{(-ia+b)(\cos ax + i \sin ax)}{a^2+b^2} e^{bx} = \frac{b\cos ax + a \sin ax}{a^2+b^2} e^{bx} + i \frac{b \sin ax - a \cos ax}{a^2+b^2} e^{bx}.$$

Na koniec wystarczy porównać część rzeczywistą z rzeczywistą, a urojoną z urojoną.

Zadanie 70

Oblicz całki nieoznaczone: $\int \sqrt{1-x^2}\, dx, \quad \int \sqrt{1+x^2}\, dx$.

Rozwiązanie

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int x' \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Pierwszą całkę po prawej stronie znamy, drugą przenosimy na lewą stronę i wynik dzielimy przez dwa.

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2}.$$

Identycznie liczymy drugą całkę, przy czym na koniec wykorzystujemy wynik jednego z wcześniejszych zadań.

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int x' \sqrt{1+x^2}\, dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

$$= x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{1-(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = x\sqrt{1+x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \sqrt{1+x^2}\, dx,$$

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2}.$$

Zadanie 71

Oblicz całkę nieoznaczoną: $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Rozwiązanie

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)}\, dx = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int x \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' dx = \arctan x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right).$$

Całki

Niech f będzie funkcją ograniczoną określoną na przedziale $[a, b]$. Dla wygody, przyjmujmy, że wartości f są nieujemne (przy bardziej formalnej definicji nie ma to znaczenia). Całka z funkcji f to pole pod wykresem funkcji. Oczywiście musimy jakoś zdefiniować pole pod wykresem.

Pod wykresem funkcji umieszczamy możliwie wysokie przylegające do siebie prostokąty. Sumę pól tych prostokątów nazywamy sumą dolną. Podobnie definiujemy sumę górną. Tym razem chcemy, aby prostokąty pokrywały wykres. Jeśli kres górny sum dolnych jest równy kresowi dolnemu sum górnych, to mówimy, że funkcja jest całkowalna (w sensie Riemanna), a wspólny kres nazywamy całką.

Całkę z funkcji f na przedziale $[a, b]$ oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Wymienię teraz kilka ważnych twierdzeń o całkach.

Twierdzenia

- Funkcja ciągła jest całkowalna (więcej, funkcja ograniczona, która ma skończony zbiór punktów nieciągłości też jest całkowalna).

- Jeśli funkcja f jest całkowalna, to

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{(n-k)a+kb}{n}\right) \to \int_a^b f(x)dx, \quad \text{przy} \quad n\to\infty.$$

- Jeśli funkcje f, g są całkowalne, a k jest jakąś liczbą, to funkcje kf, $f+g$ są całkowalne i zachodzą równości

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Jeśli f jest funkcja całkowalną na przedziale $[a, b]$ i $a < c < b$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- Niech f będzie funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$ oraz

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \le x \le b.$$

  Wtedy funkcja F jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$.
  Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to funkcja F jest różniczkowalna na przedziale (a, b) i $F'(x) = f(x)$ (oznacza to, że funkcje ciągłe posiadają funkcje pierwotne).

- Jeśli f jest całkowalna i $f = F'$ dla pewnej funkcji różniczkowalnej, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

  Zwykle piszemy $[F(x)]_a^b$ zamiast $F(b) - F(a)$,

Kilka kolejnych zadań to uzupełnienie listy zadań.

Zadanie 72

Oblicz całkę $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Rozwiązanie

Nic nie musimy liczyć. Całka to pole półkola o promieniu jeden, czyli $\pi/2$.

Zadanie 73

Oblicz całkę $\displaystyle\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$.

Rozwiązanie

Znów nie musimy nic liczyć. Punkt $(\pi/4, 1/2)$ jest środkiem symetrii wykresu.

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2(\pi/2 - x)}{2} = 1/2.$$

Dlatego obszar, którego pole mamy obliczyć, zajmuje połowę prostokąta $[0, \pi/2] \times [0, 1]$, a więc całka równa jest $\pi/4$.

Oczywiście możemy też wykonać odpowiedni rachunek.

$$\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_{0}^{2} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_{0}^{\pi/2} = \pi/4.$$

Zadanie 74

Oblicz granicę ciągu $\displaystyle\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

Rozwiązanie

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \cdots + \frac{1}{1+n/n}\right)$$
$$\to \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Zastosowania geometryczne

Załóżmy, że funkcje d, g są całkowalne na przedziale $[a, b]$ i $d(x) \le g(x)$ Pole obszaru określonego nierównościami: $a \le x \le b$, $d(x) \le y \le g(x)$ wyraża się wzorem

$$\text{pole } = \int_{a}^{b} [g(x) - d(x)]\,dx.$$

Zadanie 75

Oblicz pole obszaru leżącego powyżej paraboli $y = x^2$, a poniżej prostej przechodzącej przez punkty (a, a^2), (b, b^2) leżące na paraboli $(a < b)$.

Rozwiązanie

Prosta opisana jest wzorem $y = (a+b)x - ab$, o czym łatwo się przekonać podstawiając $x = a, b$.

$$\text{Pole } = \int_a^b [(a+b)x - ab - x^2]dx = \left[\frac{a+b}{2}x^2 - abx - \frac{1}{3}x^3\right]_a^b = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

Zadanie 76

Oblicz pole obszaru: $x^2 \le y \le x + 2$.

Rozwiązanie

Prosta $y = x+2$ przecina parabole $y = x^2$ w punktach: (-1,1), (2,4). Wykorzystując wynik poprzedniego zadania widzimy, że szukane pole $= 3^3/6 = 9/2$.

Trójkąt i parabola

Wiemy z rozwiązania zadania o stycznych, że styczne do paraboli $y = x^2$ w punktach (a, a^2), (b, b^2), $a < b$, przecinają się w punkcie $((a+b)/2, ab)$. Pole trójkąta o wierzchołkach (a, a^2), (b, b^2), $(a+b)/2, ab)$ określa wzór

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} b-(a+b)/2 & a-(a+b)/2 \\ b^2-ab & a^2-ab \end{vmatrix} = \frac{(b-a)^3}{4}.$$

Wniosek. Pole paraboli odciętej prostą to 2/3 pola trójkąta, którego dwa boki są styczne w miejscach przecięcia prostej z parabolą.

Kilka wzorów

- x-owa współrzędna środka masy $= \int_a^b x[g(x) - d(x)]dx : \int_a^b [g(x) - d(x)]dx$
- y-owa współrzędna środka masy $= \frac{1}{2}\int_a^b [g(x)^2 - d(x)^2]dx : \int_a^b [g(x) - d(x)]dx$
- Moment bezwładności względem osi $Y = \rho \int_a^b x^2[g(x) - d(x)]dx$
- Długość fragmentu wykresu $= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$
- Objętość bryły obrotowej $= \pi \int_a^b r(x)^2 dx$
- Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej $= 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + [r'(x)]^2}dx$
- x-owa współrzędna środka masy bryły obrotowej $= \int_a^b x\, r(x)^2\, dx : \int_a^b r(x)^2\, dx$
- Moment bezwładności bryły obrotowej względem osi $X = \frac{1}{2}\pi\rho \int_a^b r(x)^4 dx$

Zadanie 77

W jakim punkcie leży środek masy półkola o promieniu R?

Rozwiązanie

Przyjmijmy $x^2 + y^2 \leq R^2, \quad x \geq 0$ i zastosujmy pierwszy wzór. Środek masy będzie leżał na osi X. Mianownik $= \pi R^2/2$.

$$\text{Licznik} = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\left[-\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{2}{3} \cdot R^3,$$

$$x\text{-owa współrzędna środka masy} = \frac{3}{4\pi} \cdot R.$$

Przyjmijmy teraz $x^2 + y^2 \leq R^2, \quad y \geq 0$ i dla odmiany zastosujmy drugi wzór. Tym razem środek masy będzie leżał na osi Y.

$$\text{Licznik} = \frac{1}{2}\int_{-R}^R (R^2 - x^2)\, dx = \frac{1}{2}\left[R^3 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^R = \frac{2}{3} \cdot \pi R^3,$$

$$y\text{-owa współrzędna środka masy} = \frac{3}{4\pi} \cdot R.$$

Mamy ten sam wynik mniejszym kosztem.

Zadanie 78

Jak daleko od wierzchołka leży środek masy odcinka paraboli o wysokości h? (przyjmijmy szerokość równą $2h$, choć nie ma to wpływu na odpowiedź)

Rozwiązanie

Przyjmijmy $x^2/h \leq y \leq h$ i zastosujmy drugi wzór.

$$\text{mianownik} = \int_{-h}^h (h - x^2/h)dx = \left[hx - \frac{x^3}{3h}\right]_{-h}^h = \frac{4}{3} \cdot h^2.$$

$$\text{licznik} = \frac{1}{2}\int_{-h}^h (h^2 - (x^2/h)^2)dx = \frac{1}{2}\left[h^2 x - \frac{x^5}{5h^2}\right]_{-h}^h = \frac{4}{5} \cdot h^2.$$

$$y\text{-owa współrzędna środka masy} = \frac{3}{5} \cdot h.$$

Sprawdźmy, czy pierwszy wzór da nam ten sam wynik (zawsze coś można pomylić).

$$-\sqrt{hx} \leq y \leq \sqrt{hx}, \quad 0 \leq x \leq h,$$

$$\text{mianownik} = \int_0^h 2\sqrt{hx}\, dx = \frac{4}{3h}\left[(hx)^{3/2}\right]_0^h = \frac{4}{3} \cdot h^2,$$

$$\text{licznik} = \int_0^h 2x\sqrt{hx}\, dx = \frac{4}{5h^2}\left[(hx)^{5/2}\right]_0^h = \frac{4}{5} \cdot h^2,$$

$$x\text{-owa współrzędna środka masy} = \frac{3}{5} \cdot h.$$

Zadanie 79

Oblicz moment bezwładności koła o promieniu R i masie m względem osi leżącej w płaszczyźnie koła przechodzącej przez środek koła.

Rozwiązanie

Gęstość powierzchniowa $= \rho = m/(\pi R^2)$.

$$\text{moment bezwładności} = \rho \int_{-R}^{R} 2x^2 \sqrt{R^2 - x^2}\, dx$$

$$x = R\sin\phi, \quad -\pi/2 \le \phi \le \pi/2, \quad (R\sin\phi)' = R\cos\phi,$$

$$\text{moment bezwładności} = 2\rho R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\phi \cos^2\phi\, d\phi$$

$$= \rho \frac{R^4}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin 2\phi)^2\, d\phi = \rho \frac{R^4}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{mR^2}{4}.$$

Nie jest to najprostszy sposób...

Zadanie 80

Znajdź długości fragmentów wykresów funkcji.

1. $y = x^{3/2}, \quad 0 \le a \le x \le b.$
2. $y = x^{2/3}, \quad 0 \le a \le x \le b.$
3. $y = x^2, \quad a \le x \le b.$
4. $y = x^{1/2}, \quad a \le x \le b.$
5. $y = \ln\cos x, \quad -\pi/2 < a \le x \le b < \pi/2.$
6. $y = \cosh x, \quad a \le x \le b.$
7. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}, \quad 0 < a \le x \le b.$ Wszystko tak dobrane, aby się udało.
8. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad -1 \le x \le 1.$ Czy znasz tą krzywą?

Rozwiązanie

1. Długość $= \int_a^b \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \frac{4}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_a^b$
2. To jest ta sama krzywa, co w zadaniu (1), tylko x i y zamieniają się rolami. Oczywiście należy odpowiednio zmienić granice całkowania.
3. Długość $= \int_a^b \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \left[\frac{2x\sqrt{1 + 4x^2} + \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2})}{4}\right]_a^b.$

   Wykorzystałem wcześniej znalezioną funkcję pierwotną.
4. To z kolei jest krzywa z zadania (3). Znów należy odpowiednio zmienić granice całkowania.
5. Długość $= \int_a^b \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx = \int_a^b \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right]_a^b.$
6. Długość $= \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x}\, dx = \int_a^b \cosh x\, dx = [\sinh x]_a^b.$

Zadanie 81

1. Oblicz objętość kuli o promieniu R.
2. Oblicz pole sfery o promieniu R.
3. Znajdź położenie środka masy półkuli o promieniu R
4. Oblicz moment bezładności kuli o masie m i promieniu R względem osi przechodzącej przez środek kuli.

Rozwiązanie

Kula to bryła obrotowa. $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \leq x \leq R.$

1. Objętość $= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx = \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3} \pi R^3.$
2. Rozwiąż ogólniejsze zadanie.
   Policz pole fragmentu sfery przyjmując, że $-R \leq a \leq x \leq b \leq R$.
3. Licznik $= \pi \int_{0}^{R} x(R^2 - x^2) dx = \left[\frac{1}{2} R^2 x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{R} = \frac{1}{4} \pi R^4.$
   Mianownik $= \frac{2}{3} \pi R^3$, Licznik/Mianownik $= \frac{3}{8} R.$
4. $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3,$

   moment bezwładności $= \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2 \, dx = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{5} m R^2.$

J.C. 30.05.2020