

Lista zadań am ii

Całki niewłaściwe

Oblicz

$$\int_4^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2},$$
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+3x+2}, \quad \int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

Funkcje wielu zmiennych

- $f = x^3 - 3xy^2$. Oblicz $f_{xx} + f_{yy}$.
- $f = \ln(x^2 + xy + y^2)$. Oblicz $xf_x + yf_y$.
- $f = \ln(x^2 + y^2)$. Oblicz $f_{xx} + f_{yy}$.
- $f = \arctg(y/x)$. Oblicz $xf_x + yf_y$, $xf_y - yf_x$, $f_{xx} + f_{yy}$.
- $f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Oblicz $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.
- Napisz równanie prostej stycznej do krzywej $x^2 - xy + y^2 = 7$ w punkcie (2,3).
- Napisz równanie prostej stycznej do krzywej $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ w punkcie (4,9).
- Napisz równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ w punkcie (1,1,1).
- Napisz równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = xyz + 5$ w punkcie (2,3,4).
- Znajdź lokalne ekstrema funkcji:

$$f = 5x^2 + 2y^2 - 6xy - 2x, \quad h = x^3 + y^3 - 3xy, \quad g = 2x^3 + 6xy + y^2,$$

$$u = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \quad v = e^{x-2y} + e^{y-2x+6} + e^{x+y-3}.$$

Całki podwójne

- Oblicz całkę $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ po obszarze: $x^2 \leq y$, $y^2 \leq x$.
- Oblicz całkę $\int \int_D (x^2 + y^2) dx dy$ po obszarze:
 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^3 + y^3 \leq 1$.
- Oblicz całkę $\int \int_D (x+y)^3 dx dy$ po obszarze: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$.

W kolejnych całkach przejdź do współrzędnych biegunowych:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad J = r.$$

- Oblicz całkę $\int \int_D xy \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ po obszarze:
 $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$, $0 \leq x$, $0 \leq y$.
- Oblicz całkę $\int \int_D (x^4 - y^4) dx dy$ po obszarze:
 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq y \leq x$.
- Oblicz całkę $\int \int_D xy dx dy$ po obszarze: $x^2 + y^2 \leq 4x + 6y - 12$.

Szeregi

- Znajdź sumy częściowe oraz sumy szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}.$$

- Określ zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{3^n + 7^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3^n + 5^n}},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n} \right)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}.$$

- Zapisz ułamki okresowe 0.717171..., 0.189189189... w postaci zwykłych ułamków.
- Oblicz sumy szeregów

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^n - 1)^2}{5^n}.$$

- Zapisz w postaci szeregu potęgowego oraz określ przedział jego zbieżności.

$$\frac{1}{1+x^4}, \quad \frac{3}{2-5x}, \quad \frac{4}{3-2x}, \quad \frac{1}{(1-3x)(1-5x)}, \quad \frac{1}{1-7x+10x^2}.$$

W drugim i trzecim przykładzie rozwiń dodatkowo wokół punktu 1.

- Rozwiąż równania

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = 2(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \dots),$$

$$1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots,$$

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \dots = 6/5,$$

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = 4/15.$$