Rozwiązania zadań am ii

Całki niewłaściwe

Rozwiązania zadań podobnych do zadań z listy.

Zadanie 1

Oblicz całkę niewłaściwą: $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^3}$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

$$F(x) = \int f(x)dx, \quad F'(x) = f(x)$$

oraz z definicji całki niewłaściwej

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Rachunek

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}dx = -\frac{1}{2}x^{-2} = -\frac{1}{2x^2},$$

$$\int_2^t \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_2^t = \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{t^2}),$$

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - \frac{1}{t^2}) = \frac{1}{8}.$$

W całym tekście będę pomijał dopisywaną przez wielu autorów stałą całkowania C.
W dalszych przykładach będę stosował uproszczoną notację:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_2^\infty = \frac{1}{8}.$$

Zadanie 2

Oblicz całkę niewłasciwą: $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x}$.

Rozwiązanie

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x} = [\ln x]_2^\infty = \infty.$$

Całka jest rozbieżna.

Zadanie 3

Oblicz całkę niewłaściwą: $\displaystyle\int_4^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x}}$.

Rozwiązanie

W tym zadaniu i następnych dobrze jest przepisać całkowaną funkcję w postaci wygodnej do całkowania.

$$\frac{1}{x^2\sqrt{x}} = x^{-5/2}, \quad \int x^{-5/2}\,dx = -\frac{2}{3}x^{-3/2},$$

$$\int_4^\infty \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} = \left[-\frac{2}{3}x^{-3/2}\right]_4^\infty = \frac{1}{12}.$$

Zadanie 4

Oblicz całkę niewłaściwą: $\displaystyle\int_5^\infty \frac{dx}{x^2-4x+7}$.

Rozwiązanie

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+7} = \int \frac{dx}{(x-2)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\ \frac{x-2}{\sqrt{3}},$$

gdzie skorzystaliśmy ze wzoru

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\ \frac{x}{a}, \quad a \neq 0.$$

$$\int_5^\infty \frac{dx}{x^2-4x+7} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\ \frac{x-2}{\sqrt{3}}\right]_5^\infty = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right] = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

Przypomnienie:

$$\text{arctg}\ 0 = 0, \quad \text{arctg}\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \quad \text{arctg}\ 1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{arctg}\ \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}, \quad \text{arctg}\ \infty = \frac{\pi}{2}$$

(ostatnia równość oznacza oczywiście granicę).

Zadanie 5

Oblicz całkę niewłaściwą: $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+9x+14}$.

Rozwiązanie

W tym przykładzie mianownik rozkłada się na iloczyn czynników niższego stopnia

$$x^2+9x+14 = (x+2)(x+7).$$

W takim przypadku pierwszym krokiem jest rozkład na sumę ułamków prostych. Dobieramy A, B tak, aby zachodziła równość

$$\frac{1}{(x+2)(x+7)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+7}.$$

$$1 = A(x+7) + B(x+2),$$

Porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach x.

$$\begin{cases} 1 = 7A + 2B \\ 0 = A + B \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1/5 \\ B = -1/5 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+9x+14} = \frac{1}{5}\int (\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+7})dx = \frac{1}{5}[\ln|x+2| - \ln|x+7|].$$

Najciekawszym punktem rozwiązania jest obliczenie granicy

$$\lim_{x\to\infty}[\ln(x+2)-\ln(x+7)] = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x+2}{x+7} = \ln\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x+7} = \ln 1 = 0.$$

Mamy więc

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^2+9x+14} = \frac{1}{5}\left[\ln\frac{x+2}{x+7}\right]_3^\infty = -\frac{1}{5}\ln\frac{5}{10} = \frac{1}{5}\ln 2.$$

Uwaga

Proste wyrażenia wymierne rozkłada się łatwo. Nie warto wprowadzać liter A, B.

$$\frac{1}{(x+3)(x+8)} =?$$

$$\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+8} = \frac{5}{(x+3)(x+8)}$$

Dlatego

$$\frac{1}{(x+3)(x+8)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+8}\right).$$

Zadanie 6

Oblicz całkę niewłaściwą: $\displaystyle\int_3^\infty \frac{dx}{x^3+9x^2+14x}$.

Rozwiązanie

Zaczynamy od rozkładu wyrażenia wymiernego na sumę ułamków prostych.

$$\frac{1}{x^3+9x^2+14x} = \frac{1}{x(x+2)(x+7)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+7},$$

Obie strony mnożymy przez $x(x+2)(x+7)$.

$$1 = A(x+2)(x+7) + Bx(x+7) + Cx(x+2),$$

Porównujemy współczynniki przy kolejnych potęgach x.

$$\begin{cases} 14A = 1 \\ 9A+7B+2C = 0 \\ A+B+C = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 14A = 1 \\ 7A+5B = 0 \\ 2A-5C = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 1/14 \\ B = -1/10 \\ C = 1/35 \end{cases}.$$

Teraz łatwo znajdujemy całkę nieoznaczoną.

$$\int \frac{dx}{x^3+9x^2+14x} = \frac{1}{70}[5\ln x - 7\ln(x+2) + 2\ln(x+7)].$$

Nieco trudniejsze jest obliczenie granicy

$$\lim_{x\to\infty}[5\ln x - 7\ln(x+2) + 2\ln(x+7)] = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{x^5(x+7)^2}{(x+2)^7} = 0$$

bo

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5(x+7)^2}{(x+2)^7} = 1.$$

Ostateczne

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^3+9x^2+14x} = \frac{1}{70}\ln\frac{5^5}{3^5\cdot 2^2}.$$

Alternatywne rozwiązanie

$$\frac{1}{(x+2)(x+7)} = \frac{1}{5}(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+7}).$$

Wynik ten znamy z poprzedniego zadania. Możemy też skorzystać z uwagi.

$$\frac{1}{x(x+2)(x+7)} = \frac{1}{5x}(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+7}) = \frac{1}{5}(\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{x(x+7)})$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}) - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+7}).$$

Możemy całkować

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x^3+9x^2+14x} = \left[\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x+2} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \ln \frac{x}{x+7}\right]_3^\infty = \frac{1}{10} \ln \frac{3}{5} - \frac{1}{35} \ln \frac{3}{10}.$$

Zadanie 7

Oblicz całkę niewłaściwą: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+x+x^2+x^3}.$

Rozwiązanie

Zaczynamy od rozkładu całkowanej funkcji na sumę ułamków prostych.

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B+Cx}{1+x^2}.$$

Proszę zwrócić uwagę na postać licznika drugiego ułamka.

$$A(1+x^2) + (B+Cx)(1+x) = 1, \quad \begin{cases} A+B=1 \\ B+C=0 \\ A+C=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} A=1/2 \\ B=1/2 \\ C=-1/2 \end{cases},$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2x}{1+x^2}.$$

$$\int \frac{dx}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\frac{(1+x)^2}{1+x^2}.$$

W rachunku wykorzystaliśmy wzór:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)|.$$

Końcowe rachunki, podobne do rachunków z poprzednich rozwiązań, pomijam.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x+x^2+x^3} = \frac{1}{4}(\pi - \ln 2).$$

Zadanie 8

Oblicz całkę niewłaściwą: $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\, dx.$

Rozwiązanie

Całkujemy przez części.

$$\int xe^{-x}dx = -\int x(e^{-x})'dx = -xe^{-x} + \int x'e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}.$$

W dalszym rachunku wykorzystujemy ogólny fakt

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0.$$

Dowód przeprowadzę dla $k = 3$, choć w zadaniu mamy $k = 0, 1$.
$e^x \geq x + 1$ bo najmniejsza wartość funkcji $f(x) = e^x - x - 1$ równa jest 0.
Stąd dla nieujemnych x mamy

$$e^x = (e^{x/4})^4 \geq (1 + x/4)^4, \qquad 0 \leq x^3 e^{-x} \leq \frac{x^3}{(1 + x/4)^4}.$$

Wystarczy teraz zastosować twierdzenie o trzech funkcjach.
Dokończenie jest łatwe.

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^\infty = 1.$$

Funkcje wielu zmiennych

Zadanie 9

$f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Oblicz $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$.

Rozwiązanie

$$f_x = -\frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot (2x) = -x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$
$$f_{xx} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3x^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}.$$

Podobnie

$$f_{yy} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3y^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2},$$
$$f_{zz} = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3z^2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2}.$$

Na koniec dodajemy

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} &= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} \\ &= -3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + 3(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0. \end{aligned}$$

Zadanie 10

Napisz równanie prostej stycznej do krzywej $y^2 = x(x + 1)(x + 7)$ w punkcie (1, 4).

Rozwiązanie

Krzywa jest poziomicą funkcji $f(x,y) = y^2 - x(x+1)(x+7), \quad f(x,y) = 0.$
Równanie prostej stycznej do poziomicy $f(x,y) = C$ w punkcie $P = (x_0, y_0)$:

$$f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) = 0.$$

$f_x(P)$ w równaniu powyżej oznacza pochodną cząstkową w punkcie P.
W naszym zadaniu mamy

$$f = y^2 - x^3 - 8x^2 - 7x, \quad \begin{cases} f_x = -3x^2 - 16x - 7 \\ f_y = 2y \end{cases}, \quad \begin{cases} f_x(P) = -26 \\ f_y(P) = 8 \end{cases}$$

Równanie stycznej

$$-26(x-1) + 8(y-4) = 0 \ \text{ lub prościej } \ 13x - 4y + 3 = 0.$$

Zadanie 11

Napisz równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $x^3 + y^3 + z^3 = 5xyz$
w punkcie (1, 1, 2).

Rozwiązanie

Równanie płaszczyzny stycznej do poziomicy $f(x,y,z) = C$
w punkcie $P = (x_0, y_0, z_0)$:

$$f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) + f_z(P)(z - z_0) = 0.$$

W naszym zadaniu $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 5xyz, \quad P = (1,1,2).$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 5yz \\ f_y = 3y^2 - 5xz \\ f_z = 3z^2 - 5xy \end{cases} \quad \begin{cases} f_x(P) = -7 \\ f_y(P) = -7 \\ f_z(P) = 7 \end{cases}$$

Równanie płaszczyzny stycznej

$$-7(x-1) - 7(y-1) + 7(z-2) \ \text{ lub prościej } \ x + y - z = 0.$$

Ekstrema lokalne

Powiemy, że funkcja ma minimum lokalne w punkcie P, jeśli w pewnym otoczeniu punktu P wartości funkcji są nie mniejsze od wartości funkcji w punkcie P.

Podobnie definiujemy maksimum lokalne. Maksima i minima lokalne nazywamy ekstremami lokalnymi.

W zadaniach dziedziny będę zbiorami otwartymi (wraz z każdym punktem w dziedzinie będzie zawarte pewne otoczenie punktu). Rozpatrywane funkcje będą spełniały odpowiednie założenia, o których nie będę tutaj pisał, a które pozwalają na stosowanie zaproponowanej metody.

Schemat

W punktach, w których mamy ekstremum, płaszczyzna styczna jest pozioma, a więc pochodne cząstkowe są równe zero. Punkty takie nazywa się punktami stacjonarnymi.

W następnym kroku sprawdzamy, w których punktach stacjonarnych mamy ekstrema. W tym celu obliczmy wyznacznik z macierzy drugich pochodnych.

Wyznacznik dodatni oznacza, że mamy ekstremum. Jeśli w lewym górnym rogu stoi liczba dodatnia, mamy minimum, jeśli ujemna, to maksimum.

Wyznacznik ujemny wyklucza ekstremum (wykres w otoczeniu punktu stacjonarnego przypomina siodło).

W przypadku zera metoda nie daje odpowiedzi.

Zadanie 12

Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f = (x+y)^3 - 12xy$.

Rozwiązanie

$$f_x = 3(x+y)^2 - 12y, \quad f_y = 3(x+y)^2 - 12x.$$

Najtrudniejszym elementem rozwiązania jest znalezienie punktów stacjonarnych.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3(x+y)^2 - 12y = 0 \\ 3(x+y)^2 - 12x = 0 \end{cases}, \quad (x+y)^2 = 4x = 4y, \ x = y = 0 \text{ lub } x = y = 1.$$

Mamy więc 2 punkty stacjonarne: (0,0), (1,1).

$$f_{xx} = f_{yy} = 6(x+y), \quad f_{xy} = f_{yx} = 6(x+y) - 12.$$

$$P = (0,0), \quad \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{vmatrix} = -144 < 0.$$

W punkcie (0,0) nie ma ekstremum.

$$P = (1,1), \quad \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0, \quad 12 > 0.$$

W punkcie (1,1) mamy minimum lokalne.

Zadanie 13

Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f = \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{6}{xy}, \quad x, y \neq 0.$

Rozwiązanie

$$f_x = \frac{1}{2} - \frac{6}{x^2 y}, \quad f_y = \frac{1}{3} - \frac{6}{xy^2}.$$

Punkty stacjonarne.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{x^2 y} = 0 \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{6}{xy^2} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x^2 y = 2 \cdot 6 \\ xy^2 = 3 \cdot 6 \end{cases}, \quad x^3 y^3 = 6^3, \ xy = 6, \quad x = 2, \ y = 3.$$

Pochodne cząstkowe w punkcie (2,3).

$$f_{xx} = \frac{12}{x^3 y} = \frac{1}{2}, \quad f_{yy} = \frac{12}{xy^3} = \frac{2}{9}, \quad f_{xy} = f_{yx} = \frac{6}{x^2 y^2} = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 2/9 \end{vmatrix} > 0, \quad 1/2 > 0.$$

W punkcie (2,3) funkcja ma minimum lokalne.

Zadanie 14

Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f = e^{x-y} + e^{2y-3x+5} + e^{2x-y-2}$.

Rozwiązanie

Dla wygody przyjmujemy oznaczenia:

$$P = e^{x-y}, \quad Q = e^{2y-3x+5} \quad R = e^{2x-y-2}.$$

Pierwsze pochodne i punkty stacjonarne.

$$\begin{cases} f_x = P - 3Q + 2R \\ f_y = -P + 2Q - R \end{cases}, \quad \begin{cases} P - 3Q + 2R = 0 \\ -P + 2Q - R = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} P - 3Q + 2R = 0 \\ -Q + R = 0 \end{cases}, \quad P = Q = R.$$

Zauważmy, że $PQR = e^3$ (tak to wszystko zostało dobrane).
Mamy więc $P = Q = R = e$.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - 3x + 5 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Drugie pochodne w punkcie (2,1).

$$f_{xx} = P+9Q+4R = 14e, \;\; f_{yy} = P+4Q+R = 6e, \;\; f_{xy} = f_{yx} = -P-6Q-2R = -9e.$$

$$\begin{vmatrix} 14e & -9e \\ -9e & 6e \end{vmatrix} = 3e^2 > 0, \quad 14e > 0.$$

W punkcie (2,1) funkcja ma minimum lokalne.

Całki podwójne

Niech f będzie funkcja ograniczoną określoną na prostokącie $[a, b] \times [c, d]$. Załóżmy dla wygody opowiadania, że funkcja nie przyjmuje wartości ujemnych.

Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie $[a, b] \times [c, d]$ definiujemy jako objętość pod wykresem funkcji. Oczywiście musimy wiedzieć, jak rozumieć objętość.

Dzielimy prostokąt prostymi równoległymi do boków na mniejsze prostokąty. Na każdym małym prostokącie stawiamy prostopadłościan, którego podstawą jest mały prostokąt i który w całości mieści się pod wykresem. Sumę objętości prostopadłościanów nazywamy sumą dolną. Podobnie tworzymy sumę górną (tym razem wykres nie powinien wystawać ponad prostopadłościany). Jeśli kres górny sum dolnych jest równy kresowi dolnemu sum górnych, to powiemy, że funkcja jest całkowalna, a wspólny kres nazywamy całką.

Funkcje ciągłe są całkowalne (tylko takie będą w zadaniach).

W przypadku funkcji ciągłych całkę podwójną możemy liczyć, licząc kolejno dwie całki (możemy pomyśleć, że obszar pod wykresem dzielimy na pionowe plastry, znajdujemy objętość każdego plastra, a następnie dodajemy objętości otrzymanych plastrów; zauważmy, że podziału na plastry możemy dokonać w dwóch kierunkach).

Dosyć teorii (wszystko to można wyrazić precyzyjniej, często ogólniej, a ostatnie stwierdzenia udowodnić).

Zapiszmy całkę podwójną z funkcji f po obszarze $D = [a, b] \times [c, d]$ oraz dwie równości, na których zakończyłem część teoretyczną.

$$\int\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

Nawiasów prostokątnych prawie nikt nie pisze. W dalszym tekście będę używał notacji, którą poznałem na pwr, a która wydaje mi się najwygodniejsza.

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Zadanie 15

Oblicz całkę $\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ po obszarze $D = [0,a] \times [0,b]$.

Całka nie jest przypadkowa, to moment bezwładności prostokąta względem osi prostopadłej do prostokąta, przechodzącej przez jeden z wierzchołków prostokąta.

Rozwiązanie

$$\int\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^a dx \int_0^b (x^2+y^2)dy = \int_0^a \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=b} dx$$

$$= \int_0^a [x^2b + \frac{b^3}{3}]dx = \int \left[\frac{x^3b}{3} + \frac{b^3x}{3}\right]_{x=0}^{x=a} = \frac{a^3b+ab^3}{3} = \frac{ab(a^2+b^2)}{3}.$$

Przykład: separacja całek

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x)g(y)dy\right] dx = \int_a^b f(x) \left[\int_c^d g(y)dy\right] dx = \left[\int_c^d g(y)dy\right] \left[\int_a^b f(x)dx\right].$$

Dwukrotnie wyciągnęliśmy stałą przed całkę.

Zadanie 16

Oblicz całkę $\displaystyle\int_0^1 dx \int_1^2 \frac{ye^{xy}}{e^y-1}\,dy.$

Rozwiązanie

Przykład pokazuje, że w czasem dobrze zmienić kolejność całkowania.

$$\int_0^1 dx \int_1^2 \frac{ye^{xy}}{e^y-1}\,dy = \int_1^2 dy \int_0^1 \frac{ye^{xy}}{e^y-1}\,dx = \int_1^2 \left[\frac{e^xy}{e^y-1}\right]_{x=0}^{x=1} dx$$

$$= \int_1^2 \frac{e^y-1}{e^y-1}dx = \int_1^2 dx = 1.$$

Całki po innych obszarach

Tu przydałby się rysunek. Na analizie 1, jako przykład zastosowania całkowania obliczaliśmy pole pomiędzy wykresami. Dokładniej, dwie funkcje ciągłe: d, g określone na odcinku $[a.b]$ określały obszar D

$$a \le x \le b, \quad d(x) \le y \le g(x).$$

Pole tak określonego obszaru wyrażało się całką

$$P = \int_a^b [g(x) - d(x)]dx.$$

Możemy oczywiście zamienić rolami x, y oraz rozważać sumy tak określonych obszarów.

Całkę podwójną funkcji f po obszarze D określonym nierównościami

$$a \leq x \leq b, \quad d(x) \leq y \leq g(x)$$

obliczmy stosując wzór

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{d(x)}^{g(x)} f(x,y)\, dy.$$

Zadanie 17

Oblicz całkę $\int\int_D xy\, dxdy$ po obszarze D określonym nierównościami:
$0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x+y \leq 1.$

Rozwiązanie

W każdym takim zadaniu będę prosił o rysunek obszaru, nie dlatego, że jest niezbędny do wykonania obliczeń, tylko po to, aby sprawdzić, czy student wie, jak wygląda obszar.

W zadaniu mamy:

$$d(x) = 0, \quad g(x) = 1-x, \quad a = 0, \quad b = 1,$$

$$\int\int_D xy\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy\, dy = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{24}.$$

Zadanie 18

Oblicz całkę $\int\int_D (x+y)\, dxdy$ po obszarze D określonym nierównościami:
$0 \leq x, \quad 0 \leq y, \quad x+y \leq 3, \quad xy \geq 2.$

Rozwiązanie

Znów powinniśmy zacząć od rysunku.
Obszar D leży w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych i określony jest nierównościami: $3 - x \leq y \leq 2/x$. Dodatnie rozwiązania nierówności $3 - x \leq 2/x$ należą do odcinka [1,2] (wystarczy znaleźć przecięcia wykresów $y = 3-x, \ y = 2/x$, czyli rozwiązać równanie $3 - x = 2/x$).

W rozwiązaniu wykorzystamy fakt, że zmienne x, y można zamienić, a wynik nie ulegnie zmianie. Dlatego policzymy tylko łatwiejszą całkę i pomnożymy ją przez 2.

$$\int\int_D (x+y)\, dxdy = 2\int\int_D x\, dxdy = 2\int_1^2 dx \int_{2/x}^{3-x} x\, dy = 2\int_1^2 [xy]_{y=2/x}^{y=3-x} dx$$

$$= 2\int_1^2 [3x - x^2 - 2]dx = 2\left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 2x\right]_1^2 = 2\left[\frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{3}.$$

Współrzędne biegunowe

Tu niezbędny jest rysunek!

Punkty płaszczyzny możemy opisać podając ich współrzędne kartezjańskie x, y. Każdy punkt (x, y) możemy zapisać w postaci

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad r \geq 0, \;\; r^2 = x^2 + y^2.$$

Liczby r, ϕ nazywamy współrzędnymi biegunowymi punktu (x, y). r jest odległością punktu (x, y) od punktu (0,0), natomiast ϕ jest pewnym kątem który, dla $r > 0$ możemy wyznaczyć z dokładnością do 2π. Dla punktu (0,0) kąt możemy wybrać dowolnie.

Jest wiele sytuacji, kiedy określenie położenia punktów za pomocą współrzędne biegunowe są wygodniejsze od współrzędnych kartezjańskich.

Przykłady.

- Koło o promieniu R: $x^2 + y^2 \leq R^2$, inaczej $r \leq R$.
- Pierścień o promieniach a, b: $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$, inaczej $a \leq r \leq b$.
- Wycinek koła, np. $x^2 + y^2 \leq R^2, \;\; x/\sqrt{3} \leq y \leq x\sqrt{3}$,
  inaczej $r \leq R, \;\; \pi/6 \leq \phi \leq \phi/3$.

Okazuje się, że w wielu wypadkach współrzędne biegunowe pomagają obliczyć całkę podwójną. Zwykle ma to miejsce wtedy, gdy obszar całkowania jest taki, jak w przykładach lub gdy całkujemy $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Zamiast podawać ogólne twierdzenie, rzecz pokażę na przykładach. Załóżmy, że mamy obszarem całkowania jest koło $\bigcirc$ o środku w punkcie (0,0) i promieniu R. Wtedy

$$\int\int_{\bigcirc} f(x, y)\, dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R f(r\cos\phi, r\sin\phi)\, rdr.$$

Siatka współrzędnych, czyli linie o stałym r lub ϕ to współśrodkowe okręgi i promienie. Pola powstałych fragmentów są proporcjonalne do odległości od środka i stąd bierze się dodatkowe r przed dr.

Każde rozwiązanie uzupełnij o rysunek przedstawiający obszar całkowania!

Zadanie 19

Oblicz całkę $\int\int_D (x^2 + y^2) dxdy$ po obszarze $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

Rozwiązanie

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

$$\int\int_D (x^2 + y^2) dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^3 r^2 \cdot rdr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^3 = 40\pi.$$

Zadanie 20

Oblicz całkę $\int\int_D xdxdy$ po obszarze $x^2 + y^2 \leq 4, \;\; |y| \leq x$.

Rozwiązanie

Obszar jest wycinkiem koła.

$$\int\int_D x\,dxdy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\phi \int_0^2 (r\cos\phi)\cdot r dr = \left[\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\phi\, d\phi\right]\left[\int_0^2 r\cdot r dr\right]$$

$$= [\sin\phi]_{-\pi/4}^{\pi/4}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Zadanie 21

Oblicz całkę $\int\int_D (x^2+y^2)dxdy$ po obszarze $x^2+y^2 \le 2x+2y-1$.

Rozwiązanie

$$x^2+y^2 \le 2x+2y-1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 \le 1.$$

Obszar jest kołem o środku w punkcie (1,1) i promieniu 1. W zadaniu tym wygodnie jest umieścić środek biegunowego układu współrzędnych w punkcie (1,1).

$$x = 1 + r\cos\phi,\quad y = 1 + r\sin\phi,\quad 0 \le r \le 1,\quad 0 \le \phi \le 2\pi,$$

$$x^2+y^2 = 2 + 2r(\cos\phi+\sin\phi) + r^2,$$

$$\int\int_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 [2+2r(\cos\phi+\sin\phi)+r^2]rdr$$

$$= 2\pi\int_0^1 (2+r^2)rdr = 2\pi\left[r^2+\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{2}\pi.$$

Licząc całki zmieniłem kolejność całkowania. Policz bez zmiany kolejności.

Zadanie 22

Oblicz całkę $\int\int_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ po obszarze $x^2+y^2 \le R^2$.

Rozwiązanie

Znów przechodzimy do współrzędnych biegunowych: $x = r\cos\phi,\quad y = r\sin\phi$.

$$\int\int_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R e^{-r^2}\,rdr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R = [1-e^{-R^2}]\pi.$$

Ważny wniosek

Wynik zadania można wykorzystać do obliczenia całki

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Całki tej nie możemy wychodząc od funkcji całki nieoznaczonej, bo nie znamy jeszcze odpowiedniej funkcji. Przechodząc z R do nieskończoności, otrzymamy π. Z drugiej strony otrzymamy całkę po całej płaszczyźnie (może nieściśle, ale łatwo uściślić). Mamy więc

$$\pi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right]\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right].$$

Oczywiście dwie całki w nawiasach kwadratowych są równe i dodatnie. Dlatego

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

W rozwiązanych zadaniach granice całkowania były stałe. Na zakończenie dwa przykłady, gdzie promień r będzie zależał od kąta ϕ.

Zadanie 23

Oblicz całkę $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}$ po obszarze $x^2+y^2 \leq 2x$.

Rozwiązanie

$$x^2+y^2 \leq 2x \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \leq 1.$$

Rozważany obszar jest kołem o środku w punkcie (1, 0) i promieniu 1. Moglibyśmy przesunąć układ współrzędnych biegunowych ale nie zrobimy tego, bo większym problemem od kształtu obszaru jest pierwiastek.

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad x^2+y^2 \leq 2x \Leftrightarrow r \leq 2\cos\phi,$$

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\phi \int_0^{2\cos\phi} r\cdot r dr$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=2\cos\phi} d\phi = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\phi\, d\phi = \frac{8}{3}\left[\sin\phi - \frac{1}{3}\sin^3\phi\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{32}{9}.$$

Rachunek pomocniczy

$$s = \sin\phi, \int \cos^3\phi\, d\phi = \int (1-\sin^2\phi)(\sin\phi)' d\phi = \int (1-s^2) ds = s - \frac{s^3}{3} = \sin\phi - \frac{\sin^3\phi}{3}.$$

Zadanie 24

Oblicz całkę $\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}$ po obszarze $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$.

Rozwiązanie

Tym razem mamy kwadrat, który podzielimy na dwa trójkąty. Otrzymamy dwie równe całki.

$$\int\int_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\, dy = 2\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\, dy.$$

Przejście do współrzędnych biegunowych rozwiąże problem z pierwiastkiem.

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1/\cos\phi,$$

$$\text{całka } = 2\int_0^{\pi/4} d\phi \int_0^{1/\cos\phi} r\cdot r dr = 2\int_0^{\pi/4} \left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1/\cos\phi} d\phi = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{d\phi}{\cos^3\phi}.$$

Obliczenie ostatniej całki jest proste, ale długie. Zaczniemy od całki nieoznaczonej.

$$s = \sin\phi, \quad \int \frac{d\phi}{\cos^3\phi} = \int \frac{(\sin\phi)' d\phi}{(1-\sin^2\phi)^2} = \int \frac{ds}{(1-s^2)^2}.$$

Aby obliczyć ostatnią całkę, rozkładamy całkowaną funkcję wymierną na sumę ułamków prostych.

$$\frac{1}{(1-s^2)^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+s)^2} + \frac{1}{(1-s)^2} + \frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s}\right].$$

Dalej

$$\int \frac{ds}{(1-s^2)^2} = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} + \ln(1+s) - \ln(1-s)\right].$$

Ostatecznie

$$\text{całka} = \frac{1}{6}\left[-\frac{1}{1+s} + \frac{1}{1-s} + \ln(1+s) - \ln(1-s)\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\left[2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right].$$

29.04.2020, J.C.

Szeregi

Wyrażenie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ nazywamy szeregiem.
Ciąg $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ nazywamy ciągiem sum częściowych szeregu.
Jeśli ciąg sum częściowych jest zbieżny, $S_n \to S$, to mówimy że szereg jest zbieżny i piszemy $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$. Liczbę S nazywamy sumą szeregu.
Mamy też inne oznaczenie

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Przykłady

- Sumy częściowe szeregu $0 + 0 + 0 + \cdots$ tworzą ciąg $0, 0, 0, \ldots$ zbieżny do zera.
- Sumy częściowe szeregu $1 + 1 + 1 + \cdots$ tworzą ciąg rozbieżny $1, 2, 3, 4, \ldots$.
- Sumy częściowe szeregu $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ tworzą ciąg rozbieżny $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

Twierdzenie

Jeśli szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ jest zbieżny, to $a_n \to 0$.

Dowód

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

Sam fakt, że $a_n \to 0$ nie wystarcza, aby szereg był zbieżny.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Dlatego szereg

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots$$

jest rozbieżny.

Twierdzenie

- Jeśli szereg $\sum a_n$ jest zbieżny,
  to szereg $\sum K a_n$ jest zbieżny oraz $\sum K a_n = K \sum a_n$.
- Jeśli szeregi $\sum a_n$, $\sum b_n$, są zbieżne,
  to szereg $\sum(a_n + b_n)$ jest zbieżny oraz $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n$.

Dla większej czytelności opuściłem indeksy przy symbolu sumy.

Zadanie 25

Czy szereg $1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ jest zbieżny? Jeśli tak, to znajdź jego sumę.

Rozwiązanie

Używając notacji z trzema kropkami, sami musimy się domyśleć, jak wyglądają dalsze składniki szeregu. W naszym zadaniu oczywiście $a_n = 1/2^n$ (choć faktycznie szereg mógłby się kontynuować w zupełnie dowolny sposób).

$$S_1 = 1/2, \quad S_2 = 1/2 + 1/4, \quad S_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8, \ldots$$

Za każdym razem do 1 brakuje ostatniego składnika.

$$S_1 = 1/2 = 1 - 1/2, \quad S_2 = 1/2 + 1/4 = 1 - 1/4, \quad S_3 = 1/2 + 1/4 + 1/8 = 1 - 1/8, \ldots$$

Domyślamy się, że $S_n = 1 - 1/2^n$. Oczywiście $S_n \to 1$, co oznacza, że sumą szeregu jest jeden.

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots = 1.$$

Zadanie 26

Czy szereg $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots$ jest zbieżny? Jeśli tak, to znajdź jego sumę.

Rozwiązanie

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Znajdźmy czwartą sumę częściową (wydaje się, że wystarczy, aby zobaczyć, co się dzieje).

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{1}{5}.$$

Domyślamy się, jak wygląda ogólny wzór.

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ścisły dowód indukcyjny pominiemy. Oczywiście $S_n \to 1$, a więc sumą rozważanego szeregu jest 1. W rachunkach pomógł na rozkład na ułamki proste.

Zadanie 27

Czy szereg $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots$ jest zbieżny? Jeśli tak, to znajdź jego sumę.

Rozwiązanie

$$\frac{1}{n\cdot(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right],$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right).$$

Domyślamy się, że

$$S_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

Oczywiście $S_n\to 3/4$ i tyle wynosi suma rozważanego szeregu.

Zadanie 28

Czy szereg $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots$ jest zbieżny? Jeśli tak, to znajdź jego sumę.

Rozwiązanie

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right),$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\cdot 4)}-\frac{1}{4\cdot 5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\cdot 5)}-\frac{1}{5\cdot 6}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{5\cdot 6}\right).$$

Ogólnie

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\to 1/4.$$

Zadanie 29

Dla jakich x szereg $1+x+x^2+x^3+\cdots$ jest zbieżny? Jaki jest wzór na sumę?

Rozwiązanie

Rozważany szereg nazywamy szeregiem geometrycznym.

$$x^n\to 0\iff |x|<1.$$

Załóżmy więc dalej, że $|x|<1$.

$$S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1},$$

$$xS_n=S_n-1+x^n,\quad S_n=\frac{1-x^n}{1-x}\to\frac{1}{1-x}.$$

Wynik jest na tyle ważny, że ujmę go w postaci twierdzenia.

Twierdzenie

- Szereg $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ jest zbieżny $\iff |x| < 1$.
- Jeśli $|x| < 1$, to $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$.

Zadanie 30

Zapisz ułamek okresowy $0.123123123\ldots$ ww postaci zwykłego ułamka.

Rozwiązanie

$$a = 0.123123123\ldots, \quad 1000a = 123.123123123\ldots = 123 + a,$$
$$999a = 123, \quad a = 123/999 = 41/333.$$

Co to ma wspólnego z szeregami?

$$0.123123123\ldots = \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000^2} + \frac{123}{1000^3} + \cdots$$

Zadanie 31

Oblicz sumę szeregu $2/5 + (2/5)^2 + (2/5)^3 + \cdots$.

Rozwiązanie

Szereg jest zbieżny bo $|2/5|<1$. Korzystamy ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego

$$2/5 + (2/5)^2 + (2/5)^3 \cdots = \frac{2}{5}(1 + 2/5 + (2/5)^2 + (2/5)^3 \cdots) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1-2/5} = \frac{2}{3}.$$

Zadanie 32

Oblicz sumę szeregu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{7^n}$.

Rozwiązanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2/7)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (3/7)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (4/7)^n$$
$$= \frac{1}{1-2/7} + \frac{1}{1-3/7} + \frac{1}{1-4/7} = \frac{7}{5} + \frac{7}{4} + \frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 47}{60}.$$

Badanie zbieżności

Trudno jest wymyślić łatwe i sensowne zadania na znajdowanie sum szeregów. Na ogół studenci proszeni są o sprawdzenie, czy dany szereg jest zbieżny. W badaniu zbieżności szeregów przydatne są kryteria zbieżności.

Kryterium porównawcze

Jeśli $0 \le a_n \le b_n$ i szereg $\sum b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Dowód

Korzystamy z twierdzenia, które mówi, że ciąg niemalejący i ograniczony jest zbieżny. Oznaczmy przez A_n, B_n sumy częściowe szeregów $\sum a_n$, $\sum b_n$. Ciąg B_n jest niemalejący, więc $B_n \le B$, gdzie B jest granicą ciągu B_n. Ciąg A_n jest niemalejący i $A_n \le B_n \le B$, zatem ma granicę.

Zadanie 33

Wykaż, że szereg $1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \cdots$ jest zbieżny.

Rozwiązanie

$\dfrac{1}{(n+1)^2} \le \dfrac{1}{n(n+1)}$, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ jest zbieżny.

Oczywiście zbieżny jest też szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Zadanie 34

Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ jest zbieżny?

Rozwiązanie

$\dfrac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n} \le 2 \cdot (4/5)^n$, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (4/5)^2$ jest zbieżny,

więc szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{2^n + 5^n}$ jest zbieżny.

Twierdzenie

Jeśli szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Dowód

$0 \le |a_n| + a_n \le 2|a_n|$, szereg $\sum |a_n|$ jest zbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego szereg $\sum(|a_n| + a_n)$ jest zbieżny. $a_n = (|a_n| + a_n) - |a_n|$. Szereg $\sum a_n$ jest zbieżny bo jest różnicą dwóch szeregów zbieżnych.

Zadanie 35

Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ jest zbieżny?

Rozwiązanie

$\left|\dfrac{\sin n}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc rozważany szereg jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta

Jeśli $a_n > 0$ i $a_{n+1}/a_n \to g < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Kryterium Cauchy'ego

Jeśli $a_n \geq 0$ i $\sqrt[n]{a_n} \to g < 1$, to szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Nietrudne dowody dwóch ostatnich kryteriów pominę. Dodam tylko, że jeśli $g > 1$, to szereg jest rozbieżny, natomiast dla $g = 1$ różnie bywa, co pokazują dwa przykłady.

$$\sum \frac{1}{n^2}, \quad \text{szereg zbieżny}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1, \quad \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{1/n^2} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1.$$

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{szereg rozbieżny}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \to 1, \quad \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \to 1.$$

Zadanie 36

Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + 4^n}$ jest zbieżny?

Rozwiązanie

Zastosujmy kryterium d'Alemberta.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{(3/4)^n + 1}{3 \cdot (3/4)^n + 4} \to 1/4.$$

Szereg zbieżny bo 1/4<1. A teraz zastosujmy kryterium Cauchy'ego.

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n + 4^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{\sqrt[n]{3^n + 4^n}} \to 1/4.$$

Szereg zbieżny bo 1/4<1.

Zadanie 37

Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ jest zbieżny?

Rozwiązanie

Zadanie w sam raz na zastosowanie kryterium d'Alemberta.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1.$$

Szereg jest zbieżny. Szereg definiuje stałą $e = 2.718281828\ldots$.
Początkowe 10 składników daje 1+1/1!+1/2!+1/3!+. . . +1/9!=2.718256. . . .

Zadanie 38

Czy szereg $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ jest zbieżny?

Rozwiązanie

Tym razem mamy zadanie w sam raz na kryterium Cauchy'ego.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to 1/e < 1.$$

Szereg zbieżny.

Szereg harmoniczny

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

Pokażemy, że szereg ten jest rozbieżny.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}.$$

Każdy zaznaczony fragment daje wkład większy od $1/2$ (tyle uzyskamy zastępując wszystkie składniki w danej grupie ostatnim). Widać, że biorąc odpowiednio dużo składników przekroczymy dowolnie dużą liczbę.

W podobny sposób można pokazać, że szereg $1 + 1/2^p + 1/3^p + 1/4^p + \cdots$ jest zbieżny $\Leftrightarrow p > 1$.

Twierdzenie Leibniza

Jeśli $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$ i $a_n \to 0$, to szereg $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ jest zbieżny.

Znów nietrudny dowód pominę.
Z twierdzenia wynika, że poniższe szeregi są zbieżne.

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

Szeregi potęgowe

Szeregiem potęgowym nazywamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{lub ogólniej} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n.$$

Istnieje pewna liczba R, zwana promieniem zbieżności szeregu taka, że szereg jest zbieżny, jeśli $|x - a| < R$ i rozbieżny, jeśli $|x - a| > R$, Promień zbieżności można wyznaczyć ze wzorów (o ile odpowiednie granice istnieją):

$$1/R = \lim_{n\to\infty} |c_{n+1}/c_n|, \quad 1/R = \lim_{n\to\infty} |\sqrt[n]{|c_n|}.$$

Granica równa zero oznacza, że szereg jest zbieżny dla każdego x.

Na początku omówiliśmy szereg $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ dla którego $R = 1$.

Kilka ważnych funkcji możemy zdefiniować lub zapisać w postaci sumy szeregu potęgowego.

- $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots$
- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$
- $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots, \quad x \in (-1, 1]$

Zadanie 39

Rozwiń funkcję $f(x) = 3/(5 - 7x)$ w szereg potęgowy.

Rozwiązanie

$$f(x) = \frac{3}{7-5x} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1-(5/7)x} = \frac{3}{7}(1 + (5/7)x + (5/7)^2x^2 + (5/7)^3x^3 + \cdots).$$

Szereg jest zbieżny $\Leftrightarrow |x| < 7/5$. W rachunku skorzystaliśmy ze wzoru

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

Zadanie 40

Rozwiń funkcję $f(x) = 3/(7 - 5x)$ w szereg potęgowy wokół punktu 1.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{7-5x} = \frac{3}{7-5(x-1)-5} = \frac{3}{2-5(x-1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-(5/2)(x-1)} \\ &= \frac{3}{2}(1 + (5/2)(x-1) + (5/2)^2(x-1)^2 + (5/2)^3(x-1)^3 + \cdots). \end{aligned}$$

Szereg jest zbieżny $\Leftrightarrow |x - 1| < 2/5$.

Zadanie 41

Rozwiń funkcję $f(x) = \dfrac{1}{1-5x+6x^2}$ w szereg potęgowy.

Rozwiązanie

Zaczynamy od rozkładu na sumę ułamków prostych.

$$f(x) = \frac{1}{1-5x+6x^2} = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

$$= 3(1 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots) - 2(1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \cdots)$$
$$= (3-2) + (3^2 - 2^2)x + (3^3 - 2^3)x^2 + (3^4 - 2^4)x^4 + \cdots, \quad |x| < 1/3.$$

Zadanie 42

Rozwiąż równanie $x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots = 2/3$.

Rozwiązanie

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \cdots = \frac{x}{1-x^2} = 2/3,$$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0, \quad x = 1/2 \;\text{ lub }\; x = -2.$$

Z dwóch liczb: 1/2, -2, tylko dla 1/2 szereg jest zbieżny.
Rozwiązanie tego rodzaju nazywa się analizą starożytnych. Pomijamy pewne założenia, dostajemy większy zbiór, z którego wybieramy prawidłowe rozwiązania.

Zadanie 43

Rozwiąż równanie $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = 1/2$.

Rozwiązanie

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{x^2}{1-x} = 1/2,$$

$$2x^2 + x - 1 = 0, \quad x = 1/2 \;\text{ lub }\; x = -1.$$

Znów wybieramy tylko 1/2, bo dla -1 szereg jest rozbieżny.

Kilka rachunków

Znajdziemy przybliżone wartości π, $\ln 2$ i $\ln 5$.

$$\pi/4 = \arctan 1 = \arctan 1/2 + \arctan 1/3$$

Pięć pierwszych wyrazów rozwinięcia w szereg funkcji arctg daje mam $\pi \approx 3,140\ldots$.

$$\ln 2 = -\ln 1/2 = -\ln(1-1/2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{4\cdot 16} + \frac{1}{5\cdot 32} + \cdots$$

5 pierwszych wyrazów daje nam 0,688…, a wartość dokładna wynosi 0,693….
A jak obliczyć $\ln 5$?

$$5 = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = 2/3, \quad \ln 5 = \ln(1+2/3) - \ln(1-2/3)$$

$$= 2\left((2/3) + \frac{(2/3)^3}{3} + \frac{(2/3)^5}{5} + \frac{(2/3)^7}{7} + \cdots\right).$$

5 pierwszy wyrazów daje nam 1.600…, a wartość dokładna wynosi 1.609…
Konieczne oszacowanie błędu nie jest trudne.

J.C. 17.05.2020