Całki krzywoliniowe niezorientowane

Oblicz długości krzywych, naszkicuj krzywe.
Wykorzystaj wzór: długość= $\int_a^b |v|dt$,
gdzie $v = (dx/dt, dy/dt)$ lub $v = (dx/dt, dy/dt, dz/dt)$.

1. $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$.
2. $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$.
3. $x = (\cos t)^3,\ y = (\sin t)^3,\ t \in [0, \pi/2]$.
4. $x = e^{3t/4} \cos t,\ y = e^{3t/4} \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$,
5. $x = t,\ y = \cosh t,\ t \in [-\ln 2, \ln 2]$.
6. $x = t^2,\ y = t^3,\ t \in [0, 1/2]$.
7. $x = t - t^3/3,\ y = t^2,\ t \in [0, 1]$.
8. $x = 4\cos t,\ y = 4\sin t,\ z = 3t,\ t \in [0, 2\pi]$.
9. $x = t^2 \cos t,\ y = t^2 \sin t,\ z = 2t,\ t \in [0, 2\pi]$.
10. $x = t,\ y = t^2,\ z = (2/3)t^3,\ t \in [0, 3]$.

Znajdź współrzędną pionową środka masy krzywych z podpunktów: 1, 5. Zastosuj wzór: współrzędna y środka masy $= [\int_a^b y\ |v|\ dt\ ]/$długość.

Znajdź krzywiznę krzywych z podpunktów 1, 5 oraz dla linii $x = t,\ y = t^2$.

Wykorzystaj wzór: krzywizna $= 1/R = \dfrac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$.

Kropki nad x, y oznaczają pierwszą i drugą pochodną (oznaczenia Newtona).

Całki powierzchniowe niezorientowane

1. Oblicz objętość kuli o promieniu R
2. Znajdź położenie środka masy półkuli o promieniu R.
3. Oblicz moment bezwładności kuli o promieniu R.
   Wynik wyraź przez masę: $\rho = M/V$.
4. Oblicz powierzchnię pasa sfery o promieniu R i wysokości h.
5. Torus o promieniach $a,\ b,\ 0 < b < a$ uzyskamy odejmując
   od bryły opisanej funkcją $f_+(z) = a + \sqrt{b^2 - z^2}$
   bryłę opisaną funkcją $f_-(z) = a - \sqrt{b^2 - z^2}$.
   Oblicz objętość torusa (różnica dwóch całek).
6. Oblicz pole torusa (suma dwóch całek).

Wykorzystaj wzory stosowne do brył obrotowych ($\sqrt{x^2 + y^2} \leq f(z),\quad a \leq z \leq b$).

1. Objętość: $V = \pi \int_d^g f(z)^2 dz$.
2. Współrzędna z środka masy $= [\pi \int_d^g z f(z)^2]/V dz$.
3. Moment bezwładności względem osi $z = \dfrac{\pi}{2}\rho \displaystyle\int_d^g f(z)^4 dz$.
4. Pole powierzchni bocznej $P = 2\pi \int_d^g f(z)\sqrt{1 + f'(z)^2} dz$.

Parametryzacja kuli i sfery

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta.$$

Kula o promieniu $R:\quad 0 \le r \le R, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$
W przypadku sfery ustalamy $r = R$.

$$u = (x_\phi,\ y_\phi,\ z_\phi), \quad v = (x_\theta,\ y_\theta,\ z_\theta), \quad w = (x_r,\ y_r,\ z_r).$$

1. Sprawdź, że wektory u, v, w są parami prostopadłe.
   Wynika stąd, że $|u \times v| = |u| \cdot |v|$ i $|\text{jakobian}| = |u| \cdot |v| \cdot |w|$.
   Oblicz $|u \times v|$ oraz moduł jakobianu.
2. Oblicz objętość kuli.
3. Oblicz pole sfery $= \int\int |u \times v|\, d\phi\, d\theta$.
4. Oblicz moment bezwładności sfery $= \int\int (x^2 + y^2)|u \times v| d\phi\theta$.

Parametryzacja torusa

$$x = (a + r\cos\theta)\cos\phi, \quad y = (a + r\cos\theta)\sin\phi, \quad z = r\sin\theta,$$

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le b.$$

W przypadku powierzchni torusa $r = b$.

$$u = (x_\phi,\ y_\phi,\ z_\phi), \quad v = (x_\theta,\ y_\theta,\ z_\theta), \quad w = (x_r,\ y_r,\ z_r).$$

1. Sprawdź, że wektory u, v, w są parami prostopadłe.
   Wynika stąd, że $|u \times v| = |u| \cdot |v|$ i $|\text{jakobian}| = |u| \cdot |v| \cdot |w|$.
   Oblicz $|u \times v|$ oraz moduł jakobianu.
2. Oblicz objętość torusa.
3. Oblicz pole torusa $= \int\int |u \times v|\, d\phi\, d\theta$.

Dalsze zadania

1. Zaznacz na płaszczyźnie punkty nie należące do dziedziny naturalnej funkcji
   $$f(x, y) = 2\text{arctg}\, \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$
   Znajdź gradient funkcji f.
2. Oblicz całkę skierowaną $\int_L zdx + xdy + ydz$.
   Krzywa L jest odcinkiem o początku w punkcie (1,1,1) i końcu w punkcie (3,4,5).
   Czy pole $F = (z, x, y)$ jest gradientem? Jeśli tak, to znajdź f takie, że $F = \nabla f$ i oblicz jeszcze raz całkę wykorzystując ten fakt (całka $=f(3, 4, 5) - f(1, 1, 1)$).
3. Oblicz całkę skierowaną $\int_L (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$.
   Krzywa L jest odcinkiem o początku w punkcie (1,1,1) i końcu w punkcie (2,3,5).
   Czy pole $F = (y + z, z + x, x + y)$ jest gradientem? Jeśli tak, to znajdź f takie, że $F = \nabla f$ i oblicz jeszcze raz całkę wykorzystując ten fakt.

Zadania dodatkowe

1. Znajdź jakobian przekształcenia

$$x = \frac{t}{s^2 + t^2}, \quad y = \frac{s}{s^2 + t^2}$$

2. Znajdź jakobian przekształcenia

$$x = \frac{s}{1 + s + t}, \quad y = \frac{t}{1 + s + t}$$

3. Oblicz długość krzywej

$$x = t^4, \quad y = 4t, \quad z = 1/t^2, \quad t \in [1, 2].$$

4. Oblicz długość krzywej

$$x = 2\tanh t - t, \quad y = 2/\cosh t, \quad t \in [-2, 2].$$

5. Oblicz pole płata: $x = s^2 - t^2, \quad y = 2st, \quad z = s^2 + t^2, \quad s, t \in [0, 1]$.

6. Oblicz strumień pola $F = (0, 0, z)$ przez powierzchnię opisaną w poprzednim zadaniu.

7. Oblicz pole płata: $z = xy, \quad x^2 + y^2 \leq 1$.

8. Oblicz pole płata: $z^2 = 2xy,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z$.

Przykładowy test

1. Zapisz za pomocą całki długość łuku: $(x, y, z) = (t, t^2, t^3), \quad t \in [1, 2]]$.

2. Oblicz całkę skierowaną: $\int_L xdy + ydx + zdz$ po drodze $(x, y, z) = (t, t^2, t^3), \quad t \in [0, 2]]$.

3. Oblicz jakobian przekształcenia $(x, y, z) = (s, s + t, s + t + r)$.
   Mogę dać bardziej skomplikowaną funkcję, ale w dwóch wymiarach.

Rozwiązanie

1. $(x', y', z') = (1, 2t, 3t^2)$, długość $= \int_1^2 \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}dt$.

2. $dx = dt,\ dy = 2tdt,\ dz = 3tdt,$

   całka $= \int_2^3 [2t^2 + t^2 + 3t^5]dt = [t^3 + t^6/2]_0^2 = 40.$

3. jakobian$= \begin{vmatrix} x_s & y_s & z_s \\ x_t & y_t & z_t \\ x_r & y_r & z_r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$

Test A

1. $F = (yx,\ xz + z,\ xy + y + z)$. Znajdź f takie, że $\nabla f = F$.

2. Oblicz całkę skierowaną $\int_L xydy + yzdy + zxdz$ po odcinku o początku w punkcie (1,1,1) i końcu w punkcie (2,3,4).

3. Oblicz długość łuku $x = t^2,\ y = 2t,\ z = 1/t, \quad t \in [1, 3]$.

Test B

1. $F = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$. Znajdź f takie, że $\nabla f = F$.

2. Oblicz całkę skierowaną $\int_L y^2dx + z^2dy + x^2dz$ po odcinku o początku w punkcie (1,2,3) i końcu w punkcie (2,3,4).

3. Oblicz długość łuku $x = 1/(1+t^2), \quad y = t/(1+t^2), \quad t \in [0,1]$.

Test C

1. $F = (\frac{x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y}{(x^2+y^2)^2})$. Znajdź f takie, że $\nabla f = F$.

2. Oblicz długość łuku $x = e^t, \quad y = e^{-t}, \quad t\sqrt{2} \quad \in [0,1]$.

3. Oblicz całkę skierowaną $\int_L ydx+xdy$ po łuku $x = t/(1+t^2), \ y = t^3/(1+t^2), \ t \in [0,1]$ (możesz wykorzystać odpowiednie twierdzenie).

4. Oblicz strumień pola $F = (x,y,z)$ przechodzący przez powierzchnie $x = 1+s+t, \ y = 1+s, \ z = 1+t, \ s,t \in [0,1]$.

Test D

1. Oblicz długość łuku $x = 1+2\cos t, \quad y = 3+2\sin t, \quad t \in [0,\pi]$.

2. Oblicz całkę skierowaną $\int_L x^2dy + y^2dx$ po łuku $x = \cos t, \ y = \sin t, \ t \in [0,2\pi]$.

3. Oblicz jakobian przekształcenia $x = s/(s^2+t^2), \quad y = t/(s^2+t^2)$.