

AzGa

Układy równań liniowych

1. Rozwiąż następujące układy równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + 2y + 4z = 7 \\ x + 3y + 9z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 15 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 13 \\ 7x + 8y + 9z = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - z = 3 \\ 2z - u = 4 \\ 2u - x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 5 \\ x + 2y + 2z + 2u = 1 \\ x + 2y + 3z + 3u = 3 \\ x + 2y + 3z + 4u = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z + u = 1 \\ x + 2y + 3z + 4u = 7 \\ x + 3y + 6z + 10u = 3 \\ x + 4y + 10z + 20u = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z + u = 5 \\ x + 2y + z + u = 4 \\ x + y + 2z + u = 7 \\ x + y + z + 2u = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z + u = 3 \\ x - y + z - u = 5 \\ x + y - z - u = 7 \\ x - y - z + u = 13 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 3 \\ z + u = 5 \\ u + x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 3 \\ z + u = 2 \\ u + x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + 3z + 2u = 10 \\ x + 2y + 5z + 5u = 18 \\ 2x + y + 5z + 5u = 17 \\ 3x + y + 7z + 9u = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4v = 0 \\ y + 2z + 3v + 4x = 0 \\ z + 2v + 3x + 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ x + a = y + b = z + c \end{cases}$$

Działania na macierzach, wyznaczniki

2. $F(x, y) = (x + y, -x)$. Znajdź kolejne złożenia: $F \circ F, F \circ F \circ F, \dots$ (aż do szóstego).

3. Wykonaj działania

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^5, \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}^3$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

4. Znajdź macierze odwrotne do następujących macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Oblicz potęgi oraz odwróć potęgowane macierze

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2, \quad * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$$

6. Rozwiąż równanie macierzowe: $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Oblicz wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & 8 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 101 & 3 & 2 \\ 102 & 5 & 1 \\ 103 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Wartości i wektory własne

8. Znajdź wartości i wektory własne macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dwa wzory

9. Sprawdź równość $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.
10. Napisz podobne wzory dla różnic i sum:
 $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$, $a^5 + b^5$.
11. Zapisz $a^4 - b^4$ w postaci iloczynu. Wykorzystaj wzór na różnicę kwadratów.
12. Zapisz $a^6 - b^6$ na dwa sposoby: jako różnicę kwadratów oraz jako różnicę sześciątów.
13. Zapisz $a^6 + b^6$ w postaci iloczynu. Wykorzystaj wzór na sumę sześciątów.
14. Zapisz $(x + y)^3 - x^3 - y^3$ w postaci iloczynu.
15. Zapisz $(x + y)^5 - x^5 - y^5$ w postaci iloczynu (rozpisz do końca).
16. Oblicz $(x + y + z)^2 + (-x + y + z)^2 + (x - y + z)^2 + (x + y - z)^2$.

Liczby zespolone

17. Wykonaj działania: i^{29} , $(1 + i)(2 + i)(3 + i)$, $\frac{1 + i}{2 + i} + \frac{1 - i}{2 - i}$.
18. Oblicz moduły: $|20 + 21i|$, $|\frac{3 - 7i}{3 + 7i}|$.
19. Jak wyglądają figury opisane równaniami:
 $|z - 3 - 4i| = 2$, $|z - 6| = |z - 4i|$, $|(1 + i)z + (1 - i)| = 1$, $|z - 1| = 2|z|$?

Równania kwadratowe i dwukwadratowe

- 20. Rozwiąż w liczbach zespolonych następujące równania:

$$\begin{aligned} z^2 &= -9, & z^2 &= -5, & z^2 &= 5 + 12i, & z^2 &= 15 - 8i, \\ z^2 - 6z + 11 &= 0, & z^2 + 4z + 7 &= 0, & z^2 - 5z + 7 + i &= 0, \\ z^4 + 5z^2 + 4 &= 0, & z^4 + 3z^2 + 4 &= 0, & z^4 + 2z^2 + 9 &= 0. \end{aligned}$$

- 21. Rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} |z| = 17 \\ |z - 7| = |z - 9| \end{cases} \quad \begin{cases} |z - 4 - i| = |z - 6 - 3i| \\ |z - 7 - 2i| = |z - 5 - 6i| \end{cases} \quad \begin{cases} (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 10 \\ (1 + 2i)z + (1 - 2i)\bar{z} = -4 \end{cases}$$

Argumenty, potęgi, pierwiastki

22. Znajdź argumenty liczb: $1 + i$, $1 + i\sqrt{3}$, $\sqrt{3} + i$, $(1 + i)(\sqrt{3} - i)$.
23. Oblicz potęgi: $(1 + i)^4$, $(1 + i\sqrt{3})^3$, $(1 + \sqrt{3} - i + i\sqrt{3})^{24}$
- 24. Zapisz pierwiastki z jedności:
 $z^2 = 1$, $z^3 = 1$, $z^4 = 1$, $z^6 = 1$, $z^8 = 1$, $z^{12} = 1$
(3 sposoby: wzór de Moivre'a, rachunek algebraiczny, rysunek)
25. Oblicz pierwiastki:
 $z^2 = i$, $z^2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z^2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z^3 = -1 + i$, $z^3 = -1$,
 $z^3 = i$, $z^3 = -i$, $z^4 = -1$, $z^4 = -1 + i\sqrt{3}$, $z^6 = -1$, $z^6 = i$.
- 26. Rozwiąż w liczbach zespolonych równania: $z^4 = (5 + 2i)^4$, $(z + 1)^4 = (z - 1)^4$

Wielomiany

27. Czy wielomian $x^5 + 3x^2 + 2$ ma pierwiastki całkowite?
- 28. Zapisz wielomiany w postaci iloczynu wielomianów rzeczywistych niższego stopnia.

$$3x^3 - 2x - 1, \quad x^3 + 27, \quad x^5 - 32, \quad x^4 + 4,$$

$$x^4 + x^2 + 1, \quad x^4 - x^2 + 16, \quad x^6 + 1, \quad x^4 - x^2 - 6x - 9.$$

29. Znajdź resztę z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q :

$$P = x^{16} + 3x^6 + 2, \quad Q = x^2 + 1,$$

$$P = x^{30} + 5x^{12} + 1, \quad Q = x^3 - 1.$$

Ułamki proste

- 30. Zapisz funkcje wymierne w postaci sumy rzeczywistych ułamków prostych.

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6}, \quad \frac{1}{x^3 + 5x^2 + 6x}, \quad \frac{1}{15x^2 + 8x + 1},$$

$$\frac{1}{x^3 + x}, \quad \frac{1}{x^3 + x^2}, \quad \frac{1}{x^3 - x^2}, \quad \frac{1}{x^4 - 1}, \quad \frac{1}{x^4 - x^2}, \quad \frac{x}{x^4 + 4},$$

$$\frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}, \quad \frac{1}{x^4 - 2x^2 + 1}, \quad \frac{1}{x^3 + x^2 + x}, \quad \frac{x + 1}{x^3 + x - 2}.$$