Wektory i wartości własne

1. Niezerowy wektor v nazywamy wektorem własnym macierzy M, jeśli $Mv = \lambda v$ dla pewnej liczby λ. Liczbę λ nazywamy wartością własną macierzy M. Mówimy też, że wektor v należy do wartości własnej λ.

2. Inaczej, wektor własny macierzy, to taki niezerowy wektor, który nie zmienia kierunku po przekształceniu.

3. Zadanie. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

   Rozwiązanie. Równanie
$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   jest równoważne układowi równań
$$\begin{cases} 6x + 3y = \lambda x \\ 2x + 5y = \lambda y \end{cases}, \quad \begin{cases} (6-\lambda)x + 3y = 0 \\ 2x + (5-\lambda)y = 0 \end{cases}.$$
   Układ równań ma niezerowe rozwiązanie, o ile równania są do siebie proporcjonalne (liniowo zależne), co można ująć w postaci równania
$$0 = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(5-\lambda) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$
$$\lambda = 3 \text{ lub } \lambda = 8.$$
   Mamy więc dwie wartości własne: 3, 8. Dla każdej z nich znajdziemy przykładowy wektor własny (wystarczy jeden).
$$\lambda = 3, \quad 6x + 3y = 3x, \quad x = -y, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
$$\lambda = 8, \quad 6x + 3y = 8x, \quad 2x = 3y, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   W żadnym przypadku nie pisałem drugiego równania, o którym wiemy, że jest proporcjonalne do pierwszego.

4. Zadanie. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Rozwiązanie. Napiszę tylko to, czego będę oczekiwał w odpowiedziach.
$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 4 \\ -3 & -3-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$
$$\lambda = 1, \quad \begin{cases} 4x + 4y + 4z = 0 \\ -3x - 4y - 5z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 4y + 5z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   Podobnie postępujemy dla pozostałych wartości własnych, czyli dla liczb 2 i 3.

5. Macierz może nie mieć wektorów własnych. Rozważmy macierz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Jest to macierz obrotu o 90 stopni i oczywiście nie ma wektora, który po obrocie o 90 stopni miałby ten sam kierunek.
$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$
Rozwiązań możemy jednak szukać wśród liczb zespolonych:
$$\lambda = \pm i, \quad v = \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Dopuszczając liczby zespolone, zawsze będziemy mieli co najmniej jeden wektor własny.

7. Uwagi dla bardziej zainteresowanych. Zakładamy, że możemy korzystać z liczb zespolonych.

   - W zastosowaniach wygodnie mieć bazę złożoną z wektorów własnych rozważanej macierzy.
   - Wektory własne należące do różnych wartości własnych są liniowo niezależne. Dlatego, gdy wszystkie wartości własne są różne, istnieje baza złożona z wektorów własnych.
   - W przypadku macierzy symetrycznej zawsze znajdziemy bazę złożoną z wektorów własnych.
   - Czasem taka baza nie istnieje. Rozważmy macierz $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $M^2 = 0$ i dlatego wartości własne mogą być tylko zerami (możesz sprawdzić metodą zastosowaną w zadaniach). Gdyby wektory własne u, v tworzyły bazę, to dla dowolnego wektora w mielibyśmy $Mw = M(au + bv) = aMu + bMv = 0$. Oznaczałoby to, że $M = 0$ wbrew definicji M.
   - Można pokazać, że

     baza złożona w wektorów własnych macierzy M istnieje

     $$\Updownarrow$$

     macierz M jest pierwiastkiem pewnego wielomianu bez pierwiastków. wielokrotnych

Wielomiany

Wielomiany to wyrażenia postaci
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad \text{np.} \quad 7 + 5x + x^2.$$
Elementy $a_0, a_1, \ldots a_n$ nazywamy współczynnikami wielomianu. Mogą to być liczby rzeczywiste, wtedy mówimy o wielomianie o współczynnikach rzeczywistych lub krótko o wielomianach rzeczywistych.

Często składniki zapisujemy odwrotnej kolejności:
$$x^3 + 2x^2 + 3x + 5 \quad \text{zamiast} \quad 5 + 3x + 2x^2 + x^3.$$
Działania wykonujemy w znany sposób (myślę, że przykłady można pominąć).

Stopień wielomianu

$$\text{stopień } 2 + 3x + 5x^2 = 2, \quad \text{stopień } 4 = 0, \quad \text{ale} \quad \text{stopień } 0 = -\infty.$$

Jeśli P, Q są wielomianami, to

$$\text{stopień } (P + Q) \le \max(\text{stopień } P, \text{stopień } Q),$$

$$\text{stopień } PQ = (\text{stopień } P) + (\text{stopień } Q).$$

Dzielenie z resztą

Podobnie jak liczby całkowite, wielomiany można dzielić z resztą.
Dla dowolnego wielomianu P oraz dowolnego niezerowego wielomianu Q znajdziemy znajdziemy dwa wielomiany W, R takie, że

$$P = WQ + R, \quad \text{stopień } R < \text{ stopień } Q.$$

Wielomian R nazywamy resztą z dzielenia wielomianu P przez wielomian Q.

Przykład.

$$P = x^3 + 5x^3 + 2x^2 + 7z + 1, \quad Q = x^2 + x + 1,$$

$$P - x^2Q = 4x^3 + x^2 + 7z + 1,$$

$$P - x^2Q - 4xQ = -3x^2 + 3x + 1,$$

$$P - x^2Q - 4xQ + 3Q = 6x + 4,$$

$$P = (x^3 + 4x - 3)Q + (6x + 4).$$

Jest to trochę inaczej przedstawiona procedura znana ze szkoły
Jeśli $P = WQ$, to powiemy, że wielomian Q dzieli wielomian P.

Pierwiastki wielomianu

Element, dla którego wartość wielomianu równa jest zero nazywamy pierwiastkiem wielomianu.
Łatwo sprawdzić, czy wielomian o współczynnikach całkowitych ma pierwiastki całkowite.
Spójrzmy na wielomian $P = x^3 - 3x - 2$. Jeśli $u^3 - 3u - 2 = 0$ dla pewnej liczby całkowitej u, to u musi dzilić 2, a więc musi być jedną z liczb: $\pm 1, \pm 2$. Faktycznie 2 jest pierwiastkiem.
Podobnie można szukać pierwiastków wymiernych (szczegóły tu pominę).

Twierdzenie Bezout

Jeśli u jest pierwiastkiem wielomianu P, to wielomian $x - u$ dzieli wielomian P.

Dowód jest bardzo prosty.

$$P(x) = (x-u)W(x) + r, \quad 0 = P(u) = 0 \cdot W(u) + r, \quad r = 0, \quad P(x) = (x-u)W(x).$$

Wróćmy do przykładu $P = x^3 - 3x - 2$. Dzielenie przez $x - 2$ można wykonać na różne sposoby, choćby tak

$$P = x^3 - 3x - 2 = (x^3 - 2x^2) + 2(x^2 - 2x) + (x - 2)$$

$$= (x - 2)(x^2 + 2x + 1) = (x - 2)(x + 1)^2.$$

Z Twierdzenia Bezout wynika, że wielomian dodatniego stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.
Dowód indukcyjny. Wielomian pierwszego stopnia ma jeden pierwiastek. Załóżmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla n. Weźmy wielomian P stopnia $n+1$. Jeśli wielomian ten nie ma pierwiastków, to oczywiście $0 \leq n+1$. Jeśli ma jakiś pierwiastek u, to możemy napisać $P = (x-u)Q$. Wielomian Q ma stopień n więc ma nie więcej niż n pierwiastków. Dodatkowy pierwiastek u może co najwyżej zwiększyć liczbę pierwiastków z n do $n+1$ (u może być pierwiastkiem Q).

Dwa wzory i pewna sztuczka

W znajdowaniu pierwiastków pomaga zapisanie wielomianu w postacie iloczynu wielomianów niższego stopnia. Wymienię tu kilka pomocnych wzorów.

Potęga sumy (więcej znajdziesz w wykładzie am1).

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \quad \text{itd.}$$

Różnica potęg

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b),$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \quad \text{itd.}$$

Pewna sztuczka (przykład).

$$a^4 + 5a^2b^2 + 9b^4 = (a^2 + 3b^2)^2 - a^2b^2 = (a^2 - ab + 3b^2)(a^2 + ab + 3b^2).$$

Liczby zespolone

Liczby zespolone są to liczby postaci $a + bi$, gdzie a, b są liczbami rzeczywistymi, a i jest pewnym symbolem takim, że $i^2 = -1$. Liczby a, b to odpowiednio część rzeczywista i część urojona liczby z. Działania wykonujemy w zwykły sposób pamiętając, że $i^2 = -1$. Mamy więc

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di) = ac + (ad+bc)i + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i,$$

$$(2+3i) + (5+i) = 7 + 4i, \quad (2+i)(3+5i) = 1 + 13i$$

(spróbuj od razu porządkować wynik iloczynu: to nie jest trudne).
Dzielenie polega na mnożeniu przez odwrotność

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i.$$

Formalnie liczby zespolone to pary liczb rzeczywistych, na których określono odpowiedni działania. Oznacza to, że liczby zespolone możemy traktować jako punkty płaszczyzny (zwanej płaszczyzną zespoloną).

Sprzężenie i moduł liczby zespolonej, interpretacja geometryczna

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + bi$ jest liczba $\overline{z} = a - bi$.
Na przykład $\overline{2+3i} = 2-3i$, $\overline{5-i} = 5+i$. Aby pozbyć się symbolu i z mianownika, licznik i mianownik mnożymy przez sprzężenie mianownika. W szkole mogłeś spotkać się z podobnym rachunkiem w zadaniach, gdzie należało pozbyć się niewymierności z mianownika.
Sprawdź, wykonując rachunek

- $z\overline{z} = a^2 + b^2$
- $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- Jeśli $z = a + bi$, to $a = (z + \overline{z})/2$, $b = (z - \overline{z})/(2i)$

Jak wspomniałem, liczby zespolone tworzą płaszczyznę zespoloną. Odległość punktu $z = a + bi$ od zera wyraża się wzorem $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ i nazywa się modułem liczby zespolonej. Moduł posiada kilka ważnych własności (zachęcam do sprawdzenia)

- $z\overline{z} = |z|^2$
- $|\overline{z}| = |z|$
- $|zw| = |z||w|$
- $|z/w| = |z|/|w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$

Przykłady.

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \left|\frac{2+i}{2-i}\right| = \frac{|2+i|}{|2-i|} = 1.$$

Odległość liczby z od liczby w to po prostu $|z - w|$.

- Liczby spełniające równanie $|z - 3 - 2i| = 5$ tworzą okrąg o środku w punkcie $3 + 2i$ i promieniu 5.
- Liczby spełniające równanie $|z-1-3i| = |z-3-5i|$ tworzą symetralną odcinka łączącego punkty: $1 + 3i, 3 + bi$.

Równanie kwadratowe i dwukwadratowe

. Równania kwadratowe mają co najwyżej 2 rozwiązania (bo wielomian 2 stopnia ma co najwyżej dwa pierwiastki). Liczby zespolone pozwalają nam rozwiązać wszystkie równania kwadratowe.
Przykłady.

- $z^2 = 4$, $z = 2$ lub $z = -2$, w skrócie $z = \pm 2$
- $z^2 = 5$, $z = \pm\sqrt{5}$
- $z^2 = -1$, $z = \pm i$
- $z^2 = -9$, $z = \pm 3i$

- $z^3 = -7, \quad z = \pm i\sqrt{7}$, ze względów estetycznych i napisałem po lewej stronie pierwiastka
- $z^2 - 6z + 7 = 0, \quad (z-3)^2 = 2, \quad z - 3 = \pm\sqrt{2}, \quad z = 3 \pm \sqrt{2}$
- $z^2 - 4z + 7 = 0, \quad (z-2)^2 = -3, \quad z - 2 = \pm i\sqrt{3}, \quad z = 2 \pm i\sqrt{3}$

W podobny sposób można znaleźć rozwiązania dowolnego równania kwadratowego, choć w bardziej skomplikowanych przypadkach lepiej użyć wzorów znanych ze szkoły. W przypadku ujemnej lub nierzeczywistej Δ, w miejscu $\pm\sqrt{\Delta}$ należy umieścić raz jedno, a raz drugie rozwiązanie równania $\delta^2 = \Delta$. Musimy jednak wiedzieć, jak rozwiązać równanie

$$z^2 = a + bi.$$

Jest to jeden z nielicznych przypadków, kiedy warto zapisać niewiadomą w postaci $z = x + iy$ i porównać część rzeczywistą z rzeczywistą, a urojoną z urojoną.

$$(x+iy)^2 = a + bi, \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Trzecie równanie, wynikłe z porównania kwadratów modułów obu stronach oryginalnego równania, nie jest konieczne, ale ułatwia rozwiązanie problemu.

$$\begin{cases} 2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a \\ 2y^2 = \sqrt{a^2+b^2} - a \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a)/2} \\ y = \pm\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a)/2} \end{cases}.$$

Wydaje się, że zamiast 2 rozwiązań, mamy 4, jednak po uwzględnieniu drugiego równania z układu równań pozostaną nam dwa rozwiązania (równanie $z^2 = 0$ ma oczywiście tylko jednio rozwiązanie: $z = 0$).

$$z = \pm\left[\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}+a)/2} + \text{znak}(b)\sqrt{(\sqrt{a^2+b^2}-a)/2}\,\right].$$

Na koniec kilka przykładów równań dwukwadratowych.

- $z^4 - 5z^2 + 6 = 0, \quad z^2 = 3$ lub $z^2 = 2$, czyli $z = \pm\sqrt{3}$ lub $z = \pm\sqrt{2}$
- $z^4 - z^2 - 6 = 0, \quad z^2 = 3$ lub $z^2 = -2$, czyli $z = \pm\sqrt{3}$ lub $z = \pm i\sqrt{2}$
- $z^4 + 5z^2 + 6, \quad z^2 = -2$ lub $z^2 = -3$, czyli $z = \pm i\sqrt{3}$ lub $z = \pm i\sqrt{2}$

W każdym z tych przykładów pomogło podstawienie $w = z^2$. Może się jednak zdarzyć, że rozwiązanie równania kwadratowego ze względu na w nie będzie liczbą rzeczywistą. Oczywiście możemy szukać rozwiązania równania $w = z^2$, ale możemy pójść inną drogą. Co można zrobić wyjaśnią dwa przykłady.

- $z^4 + 2z^2 + 9 = 0, \quad (z^2+3)^2 = 4z^2, \quad z^2 + 3 = 2z$ lub $z^2 + 3 = -2z$,
  $z^2 + 2z + 3 = 0$ lub $z^2 - 2z + 3 = 0, \quad z = -1 \pm i\sqrt{2}$ lub $z = 1 \pm i\sqrt{2}$
- $z^4 - z^2 + 16 = 0, \quad (z^2+4)^2 = 9z^2, \quad z^2 + 4 = 3z$ lub $z^2 + 4 = -3z$,
  $z^2 - 3z + 4 = 0$ lub $z^2 + 3z + 4 = 0, \quad z = (3 \pm i\sqrt{7})/2$ lub $z = (-3 \pm i\sqrt{7})/2$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Każdą liczbę zespoloną możemy zapisać w postaci, zwanej trygonometryczną

$$z = a + bi = r(\cos\phi + i\sin\phi), \quad r \geq 0.$$

Oczywiście r jest modułem liczby zespolonej z. Kąt ϕ nazywamy argumentem liczby zespolonej z. Dla liczb różnych od zera, argument jest wyznaczony z dokładnością do 2π. Dla zera to zupełnie dowolna liczba.

W zadaniach, gdzie wykorzystuje się argument liczby zespolonej, na ogół jest to łatwy do rozpoznania kąt: wielokrotność $\pi/2$, inne wielokrotności $\pi/4$ (kąt który widzimy w kwadracie przeciętym przekątną), oraz inne wielokrotności $\pi/6$ (kąty w trójkącie równobocznym przeciętym wysokością).

Wartość numeryczną argumentu oblicza funkcja występująca w wielu językach programowania: atan2(b,a).

- $\arg(7) = 0, \quad \arg(-5) = \pi, \quad \arg(3i) = \pi/2, \quad \arg(-4i) = -\pi/2,$
- $\arg(1+i) = \pi/4, \quad \arg(1+i\sqrt{3}) = \pi/3, \quad \arg(\sqrt{3}+i) = \pi/6.$

Wiemy, że moduł iloczynu to iloczyn modułów, natomiast argument iloczynu to suma argumentów (pamiętamy, że kąty porównujemy z dokładnością do kąta pełnego).

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \quad \arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Jak to można zobaczyć? Nietrudno się przekonać, ze mnożenie przez i to obrót o kąt $\pi/2$. Ogólniej, mnożenie przez liczbę o module jeden i argumencie ϕ to obrót o kąt ϕ wokół zera. Wynika stąd ciekawy wzór:

$$\text{obrót}(\alpha) \circ \text{obrót}(\beta) = \text{obrót}(\alpha + \beta),$$

inaczej

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Porównując część rzeczywistą z rzeczywistą, a urojoną z urojoną otrzymujemy wzory trygonometryczne

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Wzór de'Moivre

$$(\cos\phi + i\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi.$$

Przykłady zadań wykorzystujących wzór de'Moivre

- $i^{43} = i^{10\cdot4+3} = i^3 = -i$ bo argument i to 1/4 kąta pełnego.
- $(1+i)^{20} = (\sqrt{2})^{20}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{20} = 2^{10}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{4} = -2^{10}.$
  Liczbę zapisałem w postaci iloczynu. Pierwszy czynnik to moduł z potęgowanej liczby. Drugi czynnik ma moduł jeden i argument równy 1/8 kąta pełnego. Stąd wynikają dalsze rachunki.
- $(-1+i\sqrt{3})^{20} = 2^{20}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{20} = 2^{20}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2} = 2^{18}(-1-i\sqrt{3})$

Oczywiście komputer będzie raczej dosłownie stosował wzór de'Moivre'a.

Pierwiastki z jedynki i inne pierwiastki

Równanie $z^n = 1$ ma n rozwiązań zespolonych, zwanych pierwiastkami z jedynki, opisanych wzorem

$$z = \cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Aby się przekonać wystarczy podnieść z do n-tej potęgi. Pierwiastki z jedynki leżą w wierzchołkach n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o środku w punkcie 0 i promieniu 1, przy czym jeden z wierzchołków leży w punkcie 1.

Wielomian $z^n - 1$ ma co najwyżej n pierwiastków, zatem wzór opisuje wszystkie pierwiastki z jedynki.

Rozważmy teraz równanie

$$z^n = r(\cos\phi + i \sin\phi), \quad r > 0.$$

Znów wzór de Moivre'a podpowiada jedno rozwiązanie, które pomnożone przez kolejne pierwiastki z jedynki daje nam n rozwiązań, czyli wszystkie, bo więcej być nie może. Rozwiązania opisane są więc wzorem

$$z = \sqrt[n]{r}(\cos\phi/n + i\sin\phi/n)(\cos 2k\pi/n + i \sin 2k\pi/n), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Kilka przykładów

- Rozwiązania równania $z^5 = 1$ wyrażają się wzorem

  $$z = \cos 2k\pi/5 + i \sin 2k\pi/5, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

- Rozwiążemy teraz równanie $z^4 = -4$.

  $$r = 4, \quad -1 = \cos\pi + i \sin\pi,$$

  $$z = (\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)(\cos k\pi/2 + i \sin k\pi/2), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

  Oczywiście możemy podstawiać kolejne wartości k do wzoru, możemy jednak postąpić inaczej. Argumentem -1 jest połowa kąta pełnego, po podzieleniu przez 4 dostaniemy 1/8. Liczbą zespoloną o takim argumencie jest na przykład liczba 1+i. Liczba ta ma moduł równy $\sqrt{2}$, a więc jej czwarta potęga będzie miała moduł 4, czyli tyle, ile potrzebujemy. Pierwiastkami 4 stopnia z jedynki są oczywiście liczby: $1, i, -1, -i$. Mamy więc 4 rozwiązania.

  $$1+i, \quad i(1+i) = -1+i, \quad -(1+i) = -1-i, \quad -i(1+i) = 1-i.$$

- Rozwiązać równanie $z^4 = (3+4i)^8$.
  Jednym z rozwiązań jest oczywiście liczba $z = (3+4i)^2$. Pozostałe rozwiązania uzyskamy mnożąc liczbę $(3+4i)^2$ kolejno przez: $1, i, -1, -i$.

Kilka zadań na ten temat umieściłem na liście zdań.

Podstawowe twierdzenie algebry

Nietrudno uzasadnić, że wielomian rzeczywisty nieparzystego stopnia ma pierwiastek rzeczywisty. Wielomian rzeczywisty parzystego stopnia może nie mieć pierwiastków rzeczywistych. Liczby zespolone pozwalają sformułować dużo poważniejsze twierdzenie.

- Wielomian zespolony dodatniego stopnia ma pierwiastek zespolony.
- Wniosek. Wielomian zespolony dodatniego stopnia jest iloczynem wielomianów liniowych $x - a$, być może pomnożonych przez jakąś liczbę.
- Jeśli $p + qi$ jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego, to $p - qi$ też jest pierwiastkiem. Oczywiście niebanalny jest tylko przypadek, gdy $q \neq 0$. W takim przypadku wielomian dzieli się przez wielomian kwadratowy

$$(x - p - qi)(x - p + qi) = (x - p)^2 + q^2.$$

- Wniosek. Wielomian rzeczywisty dodatniego stopnia jest iloczynem czynników liniowych, kwadratowych i jakiejś liczby.

Ułamki proste

Przypomnę, funkcją wymierną (wyrażeniem wymiernym) nazywamy iloraz wielomianów (mianownik oczywiście nie może być zerem).

Ułamek prosty, to funkcja wymierna postaci f/g^n, gdzie g jest nierozkładalnym wielomianem dodatniego stopnia, a f wielomianem stopnia niższego od stopnia wielomianu g.

Wiemy, na jakie czynniki rozkładają się wielomiany zespolone i rzeczywiste.

- Zespolone ułamki proste: $\dfrac{A}{(x-p)^n}$.
- Rzeczywiste ułamki proste: $\dfrac{A}{(x-p)^n}, \quad \dfrac{Ax+B}{[(x-p)^2+q^2]^n}, \quad q \neq 0.$

Każdy iloraz niezerowych wielomianów, w którym stopień mianownika jest wyższy od stopnia licznika można zapisać w postaci sumy ułamków prostych. Postać sumy zilustruję trzema przykładami.

$$\frac{1}{x(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3},$$

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

$$\frac{1}{x^3(x+1)^2(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+5}.$$

Przykłady rozkładów

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{1}{x^2+9x+14} = \frac{1}{(x+2)(x+7)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+7}\right),$$

$$\frac{1}{1-5x+6x} = \frac{1}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}.$$

Do czego przydają się ułamki proste?

- Sumy.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) = 1-\frac{1}{5}.$$

Czasem jednak lepiej inaczej

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

- Całkowanie.

$$\int \frac{dx}{x^2+9x+14} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+7}\right)dx = \frac{1}{5}(\ln|x+2|-\ln|x+7|)+C.$$

- Odgadywanie oryginału transformaty Laplace'a.

$$F(s) = \frac{1}{s^2+9s+14} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+7}\right), \quad f(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t}-e^{-7t}),$$

- Szeregi potęgowe.

$$\frac{1}{1-5x+6x} = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

$$= 3(1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\cdots) - 2(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots)$$
$$= 1+(3-2)x+(3^2-2^2)x^2+(3^3-2^3)x^3+\cdots.$$

Jak rozłożyć funkcję wymierną na sumę sumę ułamków prostych?
Zaczynamy od rozłożenia mianownika na czynniki. Jeśli mamy proste wyrażenia:

$$\frac{1}{(x+3)(x+8)}, \quad \frac{x}{(x+2)(x+9)},$$

to od razu możemy napisać rozkłady

$$\frac{1}{(x+3)(x+8)} = \ ?\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+8}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+8}\right),$$

$$\frac{x}{(x+2)(x+9)} = \ ?\left(\frac{9}{x+9}-\frac{2}{x+2}\right) = \frac{1}{7}\left(\frac{9}{x+9}-\frac{2}{x+2}\right).$$

Po prostu dobieramy odpowiedni współczynnik przed nawiasem.
W ogólnym przypadku lepiej napisać schemat rozkładu i rozwiązać odpowiedni układ równań dla niewiadomych $A, B, C, \ldots$.
Zobaczmy jeszcze, co się stanie, gdy dopiszemy trzeci czynnik. Wykorzystamy, wcześniej uzyskany wynik.

$$\frac{1}{(x+1)(x+3)(x+8)} = \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+8}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right) - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+8}\right).$$

Podobnie

$$\frac{1}{(x+3)^2(x+8)} = \frac{1}{x+3}\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+3}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+8}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(x+3)(x+8)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x+3} + \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{x+8}.$$

Przedstawiony rachunek jest właściwie uzasadnieniem postaci rozkładu w przypadku, gdy mianownik rozkłada się na czynniki liniowe, a w liczniku mamy liczbę. Jeśli w liczniku stałby wielomian, to wykonując dzielenie uzyskalibyśmy taką samą postać (nie mógłby pozostać wielomian, bo w granicy dużych x powinno zostać zero). W przypadku czynników nierozkładalnych wyższego stopnia lepiej przeprowadzić dowód w inny sposób, ale nie miejsce tutaj na takie rozważania.

Przykład

$$\frac{x^2+3x+5}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}.$$

Mnożymy obie strony przez mianownik lewej strony

$$x^2+3x+5 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2.$$

Porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach x

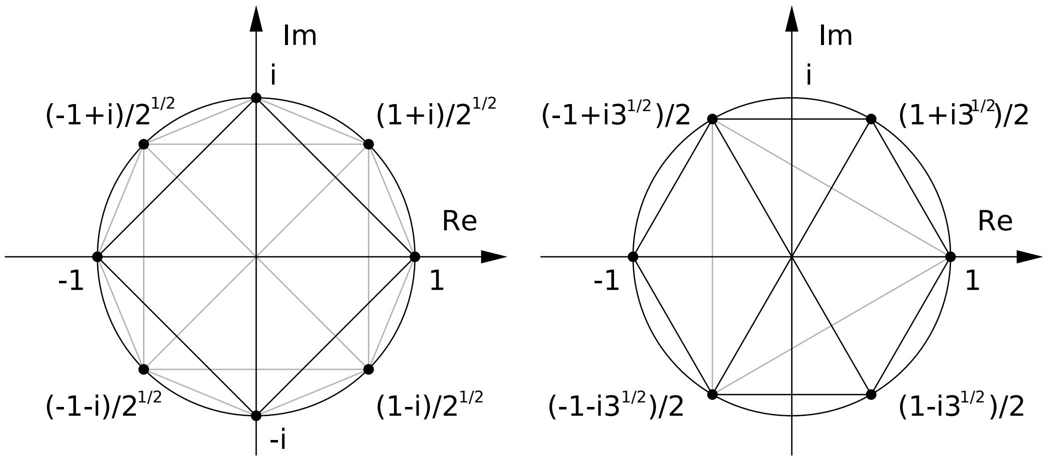
$$\begin{cases} x^0: & 5 = B \\ x^1: & 3 = A+B \\ x^2: & 1 = A+C \end{cases}$$

Rozwiązując układ równań znajdujemy $A=-2, B=5, C=3$. Zatem

$$\frac{x^2+3x+5}{x^2(x+1)} = -\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x+1}.$$

J.C. 17.05.2020

Pierwiastki z jedynki (uzupełnienie)



Zespolone rozwiązania równania $z^n = 1$ opisane są wzorem:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0,1,2,3,\ldots n-1.$$

Rozwiązania leżą w wierzchołkach n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu jeden i środku w punkcie zero, przy czym jeden z wierzchołków leży w punkcie jeden.

Dla pewnych n pierwiastki z jedynki można dość prosto zapisać bez użycia funkcji trygonometrycznych. Wszystkie wymagane od studentów pierwiastki można odczytać z dwóch rysunków.

- $z = 1$. Rozwiązania: $z = 1$.
- $z^2 = 1$. Rozwiązania: $z = 1, \ -1$.
- $z^4 = 1$. Rozwiązania: $z = 1, \ -1, \ i, \ -i$.
- $z^8 = 1$. Rozwiązania: $z = 1, \ -1, \ i, \ -i, \ \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \ \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \ \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \ \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.

- $z^3 = 1$. Rozwiązania: $z = 1,\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.
- $z^6 = 1$. Rozwiązania: $z = 1,\ -1,\ \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Równie łatwo możemy wypisać 12 pierwiastków 12 stopnia z jedynki.

Rozwiązania algebraiczne

$$z^4 = 1 \Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \text{ lub } z^2 = -1 \Leftrightarrow z = \pm 1 \text{ lub } z = \pm i.$$

$$z^8 = 1 \Leftrightarrow z^4 = 1 \text{ lub } 4^2 = -1.$$

Rozwiązania pierwszego równania już znamy, $z = \pm 1,\ \pm i$.

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow (z^2+1)^2 = 2z^2 \Leftrightarrow z^2 + 1 = z\sqrt{2} \text{ lub } z^2 + 1 = -z\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \text{ lub } \frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}.$$

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) \Leftrightarrow z = 1 \text{ lub } z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$z^6 = 1 \Leftrightarrow z^3 = 1 \text{ lub } z^3 = -1.$$

Rozwiązania pierwszego równania już znamy.

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow z^3 + 1 = (z+1)(z^2 - z + 1) \Leftrightarrow z = -1 \text{ lub } z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Na zakończenie rozwiążemy równanie $z^5 = 1$. Temat ten wykracza poza program wykładu. Tym razem użyję miary stopniowej.

Rozwiązaniami są liczby: $1,\quad \cos 72^o \pm i \sin 72^o,\quad \cos 144^o \pm i \sin 144^o$. Suma tych liczb to zero (tak zresztą jest w ogólnym przypadku i jest to bardzo ważna własność pierwiastków z jedynki). Pomyśl, dlaczego tak jest.

$$1 + 2\cos 72^o + 2\cos 144^o = 0, \quad \cos 144^o = 2\cos^2 72^o - 1.$$

Niech $w = 2\cos 72^o$. Wtedy

$$0 = 1 + 2\cos 72^o + 2\cos 144^o = 1 + 2\cos 72^o + 2(2\cos^2 72^o - 1) = w^2 + w - 1,$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad \cos 72^o > 0, \quad \cos 72^o = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \sin 72^o = \sqrt{1 - \cos^2 72^o}.$$

Mamy więc wszystko, co potrzebne, aby zapisać rozwiązania równania $z^5 = 1$ bez użycia funkcji trygonometrycznych. Przy okazji poznaliśmy wartości funkcji trygonometrycznych wielokrotności 72^o.

Przygotowanie

1. Iloczyn skalarny wektorów w $\mathbf{R}^2$ definiujemy wzorem:
$$(a,b)\circ(x,y) = ax+by.$$

2. Podobnie definiujemy iloczyn skalarny w $\mathbf{R}^3$:
$$(a,b,c)\circ(x,y,z) = ax+by+cz.$$

3. Długość wektora v definiujemy wzorem: $|v| = \sqrt{v^2}$, gdzie $v^2 = v\circ v$.

   W szczególności $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\quad |(a,b,c)| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

4. Powiemy, że wektory u, v są prostopadłe, jeśli $u\circ v = 0$.

5. W przypadku $\mathbf{R}^2$, łatwo wskazać wektor prostopadły do wektora (a,b). Może to być wektor $(b,-a)$ lub dowolny wektor do niego równoległy.

6. W przypadku $\mathbf{R}^3$ zadanie znalezienia wektora prostopadłego do dwóch danych wektorów $u = (a,b,c), v = (p,q,r)$ jest trudniejsze. Możemy rozwiązywać odpowiedni układ równań (w prostych przypadkach można odgadnąć rozwiązanie). Pokażę, jak ogólnie rozwiązać zadanie (dla wektorów nierównoległych). Spójrzmy na rozwinięcie Laplace'a
$$\begin{vmatrix} x & y & x \\ a & b & c \\ p & q & r \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}$$
$$= (z,y,z)\circ\left(\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}\right).$$
   Wektor złożony z wyznaczników 2 stopnia to iloczyn wektorowy.
$$(a,b,c)\times(p,q,r) = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}\right).$$
   Mamy tożsamość $w\circ(u\times v) = \begin{vmatrix} w \\ u \\ v \end{vmatrix}$, z której wynika od razu, że
   $u\circ(u\times v) = v\circ(u\times v) = 0$
   (wektor $u\times v$ jest prostopadły do wektorów u i v).

7. Pole równoległoboku w R^2 rozpiętego przez wektory u, v wyraża się przez moduł z wyznacznika zbudowanego z wektorów u, v.
$$\text{Pole} = |\ \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}\ |.$$

8. Objętość równoległościanu rozpiętego w R^3 rozpiętego przez wektory u, v, w wyraża się przez moduł z wyznacznika zbudowanego z wektorów u, v, w.
$$\text{Objetość} = |\ \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix}\ | = |(u\times v)\circ w|.$$

9. Pole równoległoboku w R^3 rozpiętego przez wektory u, v wyraża się wzorem
$$\text{Pole} = |u\times v|.$$

Geometria na płaszczyźnie

1. Punktami płaszczyzny są wszystkie pary liczb. Dodatkowo będziemy też rozważać dwuwymiarową przestrzeń wektorową, której elementami również będą pary liczb.

2. Każdej parze punktów możemy przypisać wektor $v = B - A$, który mówi, jaki krok należy wykonać z punktu A, aby dostać się do punktu B.

   Przykład. $A = (1, 4), \quad B = (5, 7), \quad v = B - A = (4, 3)$.
   Działania wykonujemy, jak na wektorach.

3. Odwrotnie, mając punkt i wektor, możemy powiedzieć, gdzie znajdziemy się wykonując krok określony przez wektor: $B = A + v$.

   Przykład. $A = (4, 5), \quad v = (3, 1), \quad B = A + v = (7, 6)$. Znów działania wykonujemy w zwykły sposób,

4. Prosta to zbiór punktów postaci $A + tv$, gdzie t oznacza dowolną liczbę.

   Przykład. $A = (3, 5),\ v = (1, 2),\ (x, y) = (3 + t, 5 + 2t)$
   lub inaczej $x = 3 + t,\ y = 5 + 2t$ (równanie parametryczne prostej).

5. Przez różne punkty A, B, możemy przeprowadzić dokładnie jedną prostą: prostą złożoną z punktów postaci: $A + t(B - A)$.

   Przykład. $A = (2, 1), \quad B = (5, 3)$. Prosta: $(x, y) = (2, 1) + t(3, 2)$.

6. Odcinek AB to zbiór punktów postaci: $A + t(B - A)$, przy czym $0 \leq t \leq 1$.

   Zauważmy, że $A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$. Możemy więc powiedzieć, że odcinek AB, to zbiór punktów postaci $aA + bB$, przy założeniu, że $a \geq 0,\ b \geq 0,\ a + b = 1$. Mnożenie punktów przez liczby może wydawać się dziwne, ale zauważmy, że a i b nie są dowolne $(a + b = 1)$. Jeśli $P = aA + bB$ i A, B są ustalone, to powiemy, że a, b to współrzędne barycentryczne punktu P w bazie A, B.

   Przykład. Środek odcinka $AB:\ S = A + \frac{1}{2}(B - A) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$.

   Przykład. Punkt P dzielący odcinek AB tak, że $AP : BP = 2 : 5$.

   $$P = A + \frac{2}{7}(B - A) = \frac{5}{7}A + \frac{2}{7}B.$$

7. Podobnie, mając trzy niewspółliniowe punkty A, B, C możemy określić określić współrzędne barycentryczne punktu P leżącego w trójkącie.

   Przykład. Środek trójkąta.

   $$S = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

   $$= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) + \frac{1}{3}A = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A\right) + \frac{1}{3}B = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) + \frac{1}{3}C,$$

   co oznacza, że punkt S leży na przecięciu środkowych trójkąta ABC i każdą środkową dzieli w stosunku $1 : 2$.

8. Rozważmy prostą: $x = 4 + 3t,\ y = 1 + 2t$. Eliminując parametr t dostajemy równanie $2x - 3y = 5$.

   Równanie postaci $ax + by + c = 0$ nazywamy równaniem ogólnym prostej (oczywiście a, b nie mogą być równocześnie zerami).

9. Równanie prostej prostopadłej do wektora $v = (a, b)$ przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0):\quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

   (równanie mówi po prostu, że $(a, b) \circ [(x, y) - (x_0, y_0)] = 0$).

   Przykład. Równanie prostej prostopadłej do wektora (3, 5) przechodzącej przez punkt (4,1): $3(x - 4) + 5(y - 1) = 0$.
   Można też liczyć tak: $3x + 5y = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 17$.
   A jak znaleźć równanie parametryczne? Oczywiście można zwyczajnie rozwiązać równanie wprowadzając parametr, ale wtedy zapewne w równaniach pojawią się ułamki. Spróbujmy inaczej. Niezerowym wektorem prostopadłym do wektora (3,5) jest wektor (5,-3). Wektor ten ma kierunek rozważanej prostej. Prosta przechodzi przez punkt (4,1). Mamy więc: $(x, y) = (4, 1) + t(5, -3)$.

10. Wniosek. Proste $ax + by + c = 0,\ ax + by + c' = 0$ są równoległe.

11. Niech $a, b \neq 0$. Równanie $x/a + y/b = 1$ (równanie odcinkowe prostej) opisuje prostą przechodzącą przez punkty $(a, 0), (0, b)$.

12. Zadanie. Znajdź punkt przecięcia odcinków: (1,2)(3,3), (2,1)(3,4).
    Rozwiązanie.

    $$(3,3) - (1,2) = (2,1), \quad \text{wektor prostopadły: } (1,-2), \quad \text{prosta: } x - 2y = -3,$$

    $$(3,4) - (2,1) = (1,3), \quad \text{wektor prostopadły: } (3,-1), \quad \text{prosta: } 3x - y = 5,$$

    $$\text{przecięcie prostych (rozwiązanie układu równań): } x = 13/5,\ y = 14/5.$$

13. Zadanie. Znajdź rzut prostopadły punktu (7,9) na prostą $3x + 4y = 7$.
    Rozwiązanie. Napiszmy równanie parametryczne prostej prostopadłej do prostej $3x + 4y = 7$, przechodzącej przez punkt (7,9): $\quad (x, y) = (7, 9) + t(3, 4)$.
    Punkt przecięcia prostych. $3(7 + 3t) + 4(9 + 4t) = 7,\ 25t = -50,\ t = -2$.
    Szukany punkt: $(x, y) = (1, 1)$.

    Odległość punktu od prostej = odległość punktu od rzutu prostopadły punktu na prostą. W zadaniu wektor łączący te dwa punkty = -2(3,4),
    a jego długość = 2·5=10.

14. Powtarzając rachunek na symbolach otrzymujemy ogólny wzór na odległość punktu (x_0, y_0) od prostej $ax + by + c = 0$:

    $$\text{odległość punktu od prostej} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

    Podobnie wygląda wzór na odległość pomiędzy prostymi równoległymi:
    $ax + by + c = 0,\ ax + by + c' = 0$.

    $$\text{odległość prostych równoległych} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

15. Odległość punktu P od prostej przechodzącej przez punkty A, B to wysokość równoległoboku o podstawie AB i trzecim (lub czwartym) wierzchołku P.

$$\text{wysokość} = \frac{\text{pole równoległościanu}}{\text{długośc podstawy}} = \frac{| \begin{vmatrix} B-A \\ P-A \end{vmatrix} |}{|B-A|}.$$

Zadania. Znajdź odległość punktu $(7, 9)$ od prostej przechodzącej przez punkty: (1,1), (5, -2).

$$\text{Szukana odległość} = \frac{| \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} |}{\sqrt{4^2+3^2}} = 50/5 = 10.$$

16. Pole trójkąta ABC to połowa pola odpowiedniego równoległoboku.

$$\text{pole trójkąta} = \frac{1}{2} | \begin{vmatrix} B-A \\ C-A \end{vmatrix} |.$$

Zadanie. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach (1,1), (6,5), (2,7).

$$\text{pole trójkąta} = \frac{1}{2} | \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} | = 26/2 = 13.$$

Geometria w przestrzeni

1. Prosta w $\mathbf{R}^3$ to zbiór punktów postaci $A + tv$, natomiast płaszczyzna to zbiór punktów postaci $A + su + tv$. Punkt A jest ustalony podobnie jak wektory u, v, przy czym wektory u, v nie mogą być równoległe.

2. Prostą przechodząca przez dwa różne punkty to zbiór punktów postaci: $A + t(B - A)$.
   Płaszczyzna przechodząca przez 3 punkty niewspółliniowe to zbiór punktów postaci: $A + s(B - A) + t(C - A)$.

3. Rozważmy płaszczyznę

   $$x = 5 + 3s + 2t, \quad y = 2 + s + 4t, \quad z = 1 + 2s + t.$$

   Eliminując s otrzymujemy:

   $$x - 3y = -1 - 10t, \quad 2x - 3z = 7 + t$$

   Eliminując t otrzymujemy

   $$(x - 3y) + 10(2x - 3z) = 69, \quad 21x - 3y - 30z = 69, \quad 7z - y - 10z - 23 = 0.$$

   Równanie $ax + by + cz + d = 0$ nazywa się równaniem ogólnym płaszczyzny.

4. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ prostopadłej do wektora $v = (a, b, c)$:

   $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

5. Napiszmy w inny sposób równanie ogólne płaszczyzny

$$x = 5 + 3s + 2t, \quad y = 2 + s + 4t, \quad z = 1 + 2s + t.$$

Wektor prostopadły do płaszczyzny jest prostopadły do dwóch wektorów wyznaczających płaszczyznę. Znajdziemy go licząc iloczyn wektorowy.

$$(3, 1, 2) \times (2, 4, 1) = (-7, 1, 10).$$

Równanie płaszczyzny:

$$-7(z - 5) + (y - 2) + 10(z - 1) = 0, \quad 7x - y - 10z - 23 = 0.$$

To samo, ale chyba prościej...

6. Równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty: $(a, 0, 0),\ (0, b, 0),\ (0, 0, c)$: $x/a + y/b + z/c = 1, \quad a, b, c \neq 0.$

7. Odległość punktu (x_0, y_0, z_0) od płaszczyzny $ax + by + cz + d = 0$.

$$\text{odległość} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

8. Odległość pomiędzy płaszczyznami równoległymi: $ax + by + cz + d = 0, \quad ax + by + cz + d' = 0.$

$$\text{odległość} = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

9. Odległość punktu P od prostej $A + tv$ równa jest wysokości równoległoboku rozpiętego przez wektory v i $P - A$, czyli

$$\text{odległość} = \frac{\text{pole}}{\text{długość podstawy}} \frac{|(P - A) \times v|}{|v|}.$$

10. Odległość punktu P od płaszczyzny wyznaczonej przez trzy punkty A, B, C, równa jest wysokości równoległościanu

$$\text{odległość} = \frac{\text{objętość}}{\text{pole podstawy}} = \frac{|(P - A) \circ [(B - A) \times (C - A)]|}{|(B - A) \times (C - A)|}.$$

11. Odległość dwóch prostych równoległych $A+tv,\ B+tv$ to wysokość równoległoboku rozpiętego przez wektory v i $B - A$.

$$\text{odległość} = \frac{|(B - A) \times v|}{|v|}.$$

12. Odległość dwóch prostych skośnych $A + tv,\ B + tu$ równa jest wysokości równoległościanu rozpiętego przez wektory $u,\ v,\ B - A$.

$$\text{odległość} = \frac{|(B - A) \circ (u \times v)|}{|u \times v|}.$$

13. Pole trójkąta ABC to połowa pola odpowiedniego równoległoboku.

$$\text{pole} = \frac{1}{2}|(B - A) \times (C - A)|.$$

14. objętość czworościanu $ABCD$ równa jest 1/6 objętości odpowiedniego równoległościanu.

$$\text{objętość} = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} B-A \\ C-A \\ D-A \end{vmatrix} |.$$

15. Zadanie. Znajdź rzut prostopadły punktu $(7,6,5)$ na płaszczyznę $2x+y+z=7$.
Rozwiązanie. Równanie prostej prostopadłej do płaszczyzny przechodzącej przez punkt $(7,6,5)$: $x = 7+2t,\ y = 6+t,\ z = 5+t$. Przecięcie płaszczyzny prostą.

$$2(7+2t)+(6+t)+(5+t)=7, \quad 6t=-18, \quad t=-3, \quad x=1,\ y=3,\ z=2.$$

Szukanym rzutem jest punkt (1,3,2).

16. Zadanie. Znajdź rzut prostopadły punktu (9, 8, 6) na prostą $x=1+t,\ t=1+2t,\ z=1+4t$.
Rozwiązanie. Płaszczyzna prostopadła do prostej przechodząca przez punkt (9,8,6): $x+2y+3z=49$. Przecięcie płaszczyzny prostą:

$$(1+t)+2(1+2t)+4(1+4t)=49, \quad 21t=42, \quad t=2,\ x=3,\ y=5,\ z=9.$$

Szukanym rzutem jest punkt (3,5,9).

J.C. 2.06.2020