Macierze i wyznaczniki

Układy równań i wyznaczniki

Jak rozwiązać układ 2 równań liniowych z 2 niewiadomymi?

$$\begin{cases} ax \ + \ by = e \\ cx \ + \ dy = f \end{cases}$$

Aby wyznaczyć x, pierwsze równanie mnożymy przez d, drugie przez $-b$
i dodajemy stronami.
Aby wyznaczyć y, pierwsze równanie mnożymy przez $-c$, drugie przez a
i dodajemy stronami.

$$\begin{cases} (ad - bc)x = ed - fb \\ (ad - cb)y = af - ce \end{cases}$$

Jeśli $ad - cb \neq 0$, to

$$x = \frac{ed - fb}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

Układ równań możemy zakodować podając macierz współczynników.

$$\text{macierz układu równań} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\text{rozszerzona macierz układu równań} = \begin{bmatrix} a & b & | & e \\ c & d & | & f \end{bmatrix}.$$

Wyrażenia w licznikach i mianowniku nazywamy wyznacznikami macierzy.

$$\text{wyznacznik macierzy} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb.$$

Wzory Cramera

Rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} ax \ + \ by = e \\ cx \ + \ dy = f \end{cases}$$

możemy wyrazić wzorami Cramera

$$x = \frac{W_x}{W}, \ y = \frac{W_y}{W}, \ \text{ gdzie } W = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \ W_x = \begin{vmatrix} \mathbf{e} & b \\ \mathbf{f} & d \end{vmatrix}, \ W_y = \begin{vmatrix} a & \mathbf{e} \\ c & \mathbf{f} \end{vmatrix},$$

oczywiście tylko w przypadku, kiedy $W \neq 0$.
Proszę zwrócić uwagę na czym polega różnica pomiędzy W a W_x i W_y.

Przykład

$$\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 3x + 7y = 1 \end{cases},$$

$$W = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 13, \quad W_x = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 9, \quad W_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{cases} x = W_x/W = 9/13 \\ y = W_y/W = -2/13 \end{cases}$$

Wzory ogólne

Podobne wzory możemy napisać w przypadku układu n równań liniowych z n niewiadomymi.
W przypadku 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi mamy

$$x = W_x/W, \quad y = W_y/W, \quad z = W_z/W, \ \text{ o ile } W \neq 0.$$

W, W_x, W_y, W_z są wyznacznikami macierzy 3×3.

Rekurencyjna definicja wyznacznika

Definicja rekurencyjna mówi, jak zacząć i jak z dowolnego miejsca wykonać krok dalej.
Dwa przykłady.
Potęga. $a^0 = 1, \quad a^{n+1} = a \cdot a^n$.
Silnia. $0! = 1, \quad (n+1)! = n \cdot n!$.
Wracamy do wyznacznika. Tu rzecz jest trudniejsza do zapisania, pokażę więc tylko, jak zacząć (wyznacznik z macierzy 1×1) oraz jak przejść do rozmiaru 2×2 i dalej do rozmiaru 3×3.

$$|a| = a \quad \text{(tu i dalej pionowe kreski oznaczają wyznacznik)},$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a|d| - b|c|,$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

Macierze w kolejnych wyznacznikach po prawej stronie równania powstają przez wykreślenie wiersza i kolumny zawierających wyraz stojący przed mniejszym wyznacznikiem.

Reguła Sarrusa

Wiemy, jak wygląda wyznacznik macierzy 1×1 oraz 2×2.
Wyznacznik z macierzy $n \times n$ jest sumą $n!$ iloczynów branych z różnymi znakami.
Można podać nierekurencyjny wzór, jednak na wykładzie ograniczymy się przypadku 3×3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Znany jest sposób na zapamiętanie wyniku (reguła Sarrusa).

Rozwinięcie Laplace'a

W definicji rekurencyjnej po prawej stronie pojawiają się kolejne wyrazy z pierwszego wiersza macierzy. Okazuje się, że ten sam wynik otrzymamy biorąc jakikolwiek inny wiersz lub kolumnę. Należy tylko pamiętać, że znaki pojawiające się po prawej stronie równości tworzą szachownicę

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix},$$

a więc np. w przypadku drugiego wiersza zaczynamy od minusa.

Przykład

Rozwiążemy teraz układ 3 równań liniowych z 3 niewiadomymi.

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 1 \\ 4x + 2y + 6z = 4 \\ 3x + 4y + 2z = 3 \end{cases}, \quad W = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 90 + 48 - 18 - 40 - 48 = 40,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4+90+48-18-40-24 = 60, \quad x = W_x/W = 60/40 = 3/2, \text{ itd.}$$

Własności wyznaczników

Dla prostoty zapisu ograniczę się do wyznaczników macierzy 2×2.

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a+a' & b \\ c+c' & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b \\ c' & d \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Wymienione własności w pełni definiują wyznacznik.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+0 & b+0 \\ 0+c & d+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= ab \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + ad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + bc \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + cd \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Dopiszmy jeszcze jedną własność

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & d \end{vmatrix},$$

która mówi, że wyznacznik macierzy równy jest wyznacznikowi macierzy transponowanej, czyli macierzy, w której wiersze zamieniono z kolumnami. Wynika stąd, że własności wyznacznika dotyczące kolumn są również prawdziwe dla wierszy.

Jak obliczać wyznaczniki?

Z wymienionych własności wynika, że jeśli do wybranej kolumny (wiersza) dodamy inną kolumnę (wiersz) pomnożoną przez dowolną liczbę, wyznacznik nie ulegnie zmianie.

Dodajmy na koniec jeszcze jeden, łatwy do uzasadnienia fakt

$$\begin{vmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

(gwiazdki oznaczają dowolne liczby).

Najlepiej by było przekształcić macierz do powyższej postaci, ale ułatwimy sobie zadanie uzyskując trochę zer w jakieś kolumnie lub wierszu lub po prostu zmniejszając liczby występujące w macierzy. Na koniec lub po drodze stosujemy rozwinięcie Laplace'a.

Znajdziemy teraz dwie pozostałe niewiadome w rozpatrywanym układzie równań.

$$W_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$y = W_y/W = -10/40 = -1/4,$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, \quad z = W_z/W = -10/40 = -1/4.$$

Wektory i macierze

Rozpatrujemy wektory z $\mathbf{R}^2$, czyli pary liczb. Uogólnienie jest oczywiste. Dodawanie wektorów i mnożenie wektorów przez liczby definiujemy wzorami:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}, \quad k\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}.$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad 5\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

Rozpatrzymy przekształcenie $\mathbf{R}^2$ w $\mathbf{R}^2$ określone wzorem (znów uogólnienie jest oczywiste):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

Przekształcenie tej postaci nazywa się przekształceniem liniowym.
Przekształcenie można opisać podając macierz i umawiając się, jak macierz mnożymy przez wektor

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

Przykład

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x+7y \\ 2x+3y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Dodawanie macierzy i mnożenie macierzy przez liczbę

Macierze można traktować jak wektory i dwa tytułowe działania wykonywać jak na wektorach.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}, \quad k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy

Wykonajmy dwa przekształcenia liniowe pod rząd.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} px+qy \\ rx+sy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(px+qy)+b(rx+sy) \\ c(px+qy)+d(rx+sy) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ap+br)x+(aq+bs)y \\ (cp+dr)x+(cq+ds)y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Rachunek sugeruje następującą definicję mnożenia macierzy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}.$$

Przyjrzyj się i spróbuj zrozumieć zasadę. Można mnożyć macierze różnych rozmiarów. Wystarczy aby liczba kolumn pierwszej macierzy równa była liczbie wierszy drugiej macierzy.

Mnożenie macierzy jest łączne, ale na ogół nie jest przemienne.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{7} & 1 \\ \mathbf{2} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{13} & 10 \\ 39 & 11 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 23 \\ 17 & 12 \end{bmatrix}.$$

Wytłuściłem elementy potrzebne do znalezienia wyrazu w lewym górnym rogu.

Nietrudno się przekonać, że mnożenie przez macierz jednostkową nie zmienia wektora ani macierzy.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Jeśli dla macierzy kwadratowych zachodzi równość

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

to mówimy, że druga z macierzy jest odwrotna do pierwszej i odwrotnie.

Okazuje się, że jeśli

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

to

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotna do danej jest jedyna. W przypadku 2×2 mamy

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

W przypadku 3×3 mamy

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\text{wyznacznik}} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ e & d \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{t}.$$

Litera t oznacza, że należy pozamieniać wiersze z kolumnami.

Na koniec warto zwrócić uwagę, że układ równań i rozwiązanie układu równań można zapisać w formie macierzowej

$$\begin{cases} 7x + 4y = 2 \\ 5x + 3y = 1 \end{cases}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$