

LISTA 1

CAŁKI KRZYWOLINIOWE NIEZORIENTOWANE

1. Obliczyć podane całki krzywoliniowe niezorientowane po wskazanych łukach:

a) $\int_{\Gamma} \frac{dl}{(2x + y^2)}, \quad \Gamma$ - odcinek łączący punkty $(0, -1), (2, 0)$;

b) $\int_{\Gamma} xy \, dl, \quad \Gamma$ - część elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ leżąca w I ćwiartce układu;

c) $\int_{\Gamma} xyz \, dl, \quad \Gamma$ - ćwiartka okręgu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ leżąca w I oktancie układu współrzędnych, wykonać rysunek.

2. Obliczyć pola powierzchni walcowych:

a) części powierzchni $x^2 + y^2 = 1$ znajdującej się między powierzchniami $z = 0$ i $z = y^2 + 2$;

b) części powierzchni $y = 2 - x^2$ znajdującej się w obszarze $0 \leq z \leq x, y \geq 0$, wykonać rysunek;

c)* części powierzchni $x^2 + y^2 = Rx$ znajdującej się wewnątrz kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, wykonać rysunek.

3. Obliczyć długości łuków:

a) $\Gamma : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ oraz $a > 0$;

b) Γ : jeden zwój linii śrubowej o skoku h nawiniętej na walec o promieniu r ;

c) $\Gamma : x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}$, gdzie $0 \leq t < \infty$.

4. Obliczyć masy podanych łuków:

a) $\Gamma : y = \ln x$, gdzie $1 \leq x \leq e$, a gęstość liniowa w punkcie jest równa kwadratowi odciętej tego punktu;

b) $\Gamma : x = r \cos t, y = r \sin t, z = bt$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ oraz $r > 0, b > 0$, a gęstość liniowa w punkcie jest równa kwadratowi promienia wodzącego tego punktu;

c) $\Gamma : x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$, gdzie $0 \leq t \leq 1$, a gęstość liniowa w punkcie jest równa odległości tego punktu od początku układu współrzędnych.

5. Obliczyć współrzędne środków masy podanych łuków jednorodnych:

a) cykloidy $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ oraz $a > 0$;

b) brzegu trójkąta sferycznego $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, gdzie $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

6. Obliczyć momenty bezwładności podanych łuków jednorodnych:

a) brzegu kwadratu o boku a i masie M względem przekątnej;

b) linii śrubowej $x = r \cos t, y = r \sin t, z = bt$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ oraz $r > 0, b > 0$ względem osi Ox , jeśli gęstość liniowa masy $\lambda(x, y, z) = 1$;

c) okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ o masie M względem jego średnicy.

Odpowiedzi:

1. a) $\sqrt{5}/2$, b) $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$; c) $\frac{\sqrt{3}R^4}{32}$.

2. a) 5π , b) $\frac{13}{6}$; c) $4R^2$.

3. a) $8a$, b) $\sqrt{4\pi^2r^2 + h^2}$, c) $\sqrt{3}$;

4. a) $[(e^2 + 1)\sqrt{e^2 + 1} - 2\sqrt{2}]/3$, b) $2\pi\sqrt{r^2 + b^2}(r^2 + 4\pi^2b^2/3)$, c) $\sqrt{6} - 4/3$;

5. a) $(\pi a, 4a/3)$, b) $(4/(3\pi), 4/(3\pi), 4/(3\pi))$;

6. a) $Ma^2/6$, b) $(r^2\pi + 8\pi^3b^2/3)\sqrt{r^2 + b^2}$, c) $Mr^2/2$.