LISTA 2

CAŁKI KRZYWOLINIOWE ZORIENTOWANE
POLA WEKTOROWE

1. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane z podanych pól wektorowych po wskazanych łukach (zorientowanych zgodnie z parametryzacją):

   a) $\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2, xy)$, $\Gamma : x = t, y = e^t$, gdzie $t \in [0,1]$;

   b) $\vec{F}(x,y) = (\ln x, \ln y)$, $\Gamma : y = x^2$, gdzie $x \in [1,e]$;

   c) $\vec{F}(x,y) = (x+y^2, y)$, gdzie Γ jest dolną połową elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ zorientowaną przeciwnie do ruchu wskazówek zegara;

   d) $\vec{F}(x,y) = (\dfrac{x}{y}, \dfrac{1}{y-1})$, $\Gamma : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$, gdzie $t \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$;

   e) $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$, Γ – odcinek o początku $(1,1,1)$ i końcu $(4,4,4)$.

2. Obliczyć całki krzywoliniowe zorientowane z podanych pól wektorowych po wskazanych łukach zamkniętych:

   a) $\vec{F}(x,y) = (x^2y, xy(y+1))$, $\Gamma : x^2+y^2+2y = 0$, zorientowany dodatnio;

   b) $\vec{F}(x,y) = (y, -x)$, $\Gamma : x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$ i $a > 0$, zorientowany dodatnio;

   c) $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, Γ – linia śrubowa: $x = r\cos t, y = r\sin t, z = bt$, gdzie $t \in [0,2\pi]$, $r, b > 0$, zamknięta odcinkiem łączącym jej końce (orientacja linii śrubowej zgodna z parametryzacją).

3. Sprawdzić, że podane całki nie zależą od kształtu krzywej całkowania. Następnie znaleźć potencjał odpowiedniego pola wektorowego i obliczyć całki:

   a) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(1,\frac{\pi}{2})} e^x \cos y\, dx - e^x \sin y\, dy$;

   b) $\displaystyle\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} (1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x})\, dx + (\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x})\, dy$ (Wsk. Zauważyć, że $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ jest pochodną iloczynu funkcji);

   c) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(0,2,3)} (1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z})\, dx + (\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2})\, dy - \frac{xy}{z^2}\, dz$;

   d) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} (x^2 - 2yz)\, dx + (y^2 - 2xz)\, dy + (z^2 - 2xy)\, dz$.

4. Wykorzystując twierdzenie Greena obliczyć podane całki krzywoliniowe zorientowane po dodatnio zorientowanych krzywych zamkniętych:

   a) $\displaystyle\oint_\Gamma (1-x^2)y\, dx + x(1+y^2)\, dy$, Γ – okrąg $x^2+y^2 = R^2$;

   b) $\displaystyle\oint_\Gamma (x+y^2)\, dx + (x^2+y^2)\, dy$, Γ – trójkąt o wierzchołkach $(1,1), (3,2), (3,5)$;

c) $\oint\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y[xy + \ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\,dy$, Γ składa się z łamanej o wierzchołkach $(1,0), (e,0), (e,1)$ oraz wykresu funkcji $y = \ln x$, gdzie $1 \leqslant x \leqslant e$, wykonać rysunek.

5. Za pomocą całki krzywoliniowej obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi zamkniętymi:

   a) elipsa $\Gamma: \; x = a\cos t, y = b\sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$;

   b) kardioida $\Gamma: \; x = 2\cos t - \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

6. Obliczyć pracę w podanych polach wektorowych podczas ruchu po wskazanych łukach zorientowanych:

   a) $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$, Γ –dowolny łuk łączący punkty $(1,0), (0.3)$;

   b) $\vec{F}(x,y,z) = (xy, y+z, z)$, Γ – linia śrubowa: $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ od punktu $A = (1,0,0)$ do punktu $B = (-1,0,\pi)$;

   c) $\vec{F}(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ wzdłuż dowolnego łuku Γ łączącego punkt $A = (x_1,y_1,z_1)$ należący do sfery $x^2+y^2+z^2 = r^2$ z punktem $B = (x_2,y_2,z_2)$ należącym do sfery $x^2+y^2+z^2 = R^2$;

   d) $|\vec{F}(x,y,z)|$ jest odwrotnie proporcjonalny do odległości punktu (x,y,z) od osi Oz, przy czym wektor $\vec{F}(x,y,z)$ jest prostopadły do osi Oz i ku niej skierowany, Γ – ćwiartka okręgu $x = \cos t, y = 1, z = \sin t$, gdzie $t = \in [0, \frac{\pi}{2}]$, wykonać rysunek.

7. Dla podanych funkcji wyznaczyć gradienty:

   a) $f(x) = (x^2+y^2)z$;

   b) $f(x) = \sqrt{x^2+y^3+z^4}$.

8. Dla podanych pól wektorowych znaleźć rotację i dywergencję:

   a) $\vec{F} = (xy, yz, zx)$;

   b) $\vec{F} = (x^3y, 2yz^2, xz)$;

   c) $\vec{F} = (\sin(yz^2), xz^2\cos(yz^2), 2xyz\cos(yz^2))$.

9. Udowodnić, że przy odpowiednich założeniach

   a) $\operatorname{rot}(f\,\vec{F}) = (\operatorname{grad} f) \times \vec{F} + f \operatorname{rot} \vec{F}$;

   b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

Odpowiedzi:
1. a) $\frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{12}$, b) e^2+2, c) $\frac{4}{3}ab^2$, d) $\frac{\pi^2}{24} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\ln 3$, e) $3\sqrt{3}$;
2. a) 0, b) $-\frac{3}{4}\pi a^2$, c) $-r^2\pi$;
3. a) -1; b) $\pi+1$, c) -1, d) -14;
4. a) $\pi R^4/2$, b) -2, c) $\frac{2}{3}(3-e)$;
5. a) πab, b) 6π;
6. d) $k\ln 2/2$, gdzie k jest współczynnkiem proporcjonalności;
8. a) $\operatorname{rot}(\vec{F}) = (-y,-z,-x)$, $\operatorname{div}(\vec{F}) = x+y+z$, b) $\operatorname{rot}(\vec{F}) = (-4yz, -z, -x^3)$, $\operatorname{div}(\vec{F}) = 3x^2y + 2z^2 + x$, c) $\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, $\operatorname{div}(\vec{F}) = -xz^2(z^2+4y^2)\sin(yz^2) + 2xy\cos(yz^2)$.