

LISTA 3

CAŁKI POWIERZCHNIOWE NIEZORIENTOWANE

1. Obliczyć całki powierzchniowe niezorientowane po wskazanych płatach:

a) $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, Σ – sfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$;

b) $\iint_{\Sigma} xz dS$, Σ : $x = v \cos u, y = v \sin u, z = v, 0 \leq u \leq \pi, 3 \leq v \leq 4$;

c) $\iint_{\Sigma} (xy + xz + yz) dS$, Σ : $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0$.

2. Znaleźć masy podanych płatów o wskazanych gęstościach powierzchniowych:

a) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \sigma(x, y, z) = z$;

b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 1, \sigma(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

3. Znaleźć położenia środków masy podanych jednorodnych płatów:

a) sześciennie pudełko o krawędzi a otwarte od góry;

b) części sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ leżącej w pierwszym oktancie układu współrzędnych;

c) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \leq z \leq 6$.

4. Obliczyć momenty bezwładności podanych jednorodnych płatów względem wskazanych osi:

a) sfera o promieniu R i masie M względem średnicy;

b) powierzchnia ośmiościanu $|x| + |y| + |z| = a$, o masie M względem osi Oz ;

c) powierzchnia boczna walca $x^2 + y^2 = R^2, -H \leq z \leq H$ o masie M względem osi Ox ;

Odpowiedzi.

1. a) $\frac{8}{3}\pi R^4$; b) 0; c) $R^4\sqrt{2}/2$.

2. a) πR^3 ; b) $4\pi/3$.

3. a) $x_c = y_c = 0, z_c = 2a/5$; b) $x_c = y_c = z_c = R/2$ (Wsk. Obliczać z_c); c) $x_c = y_c = 0, z_c = 4\frac{1}{3}$.

4. a) $2MR^2/3$; c) $M(\frac{R^2}{2} + \frac{H^2}{3})$.