LISTA 4
CAŁKI POWIERZCHNIOWE ZORIENTOWANE

1. Obliczyć podane całki powierzchniowe zorientowane ze wskazanych pól wektorowych po danych płatach:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, Σ - górna strona paraboloidy $z = 1 - x^2 - y^2$ odciętej płaszczyzną $z = 0$;

   b) $\vec{F}(x,y,z) = (1,1,1)$, Σ - dolna strona stożka $z = \sqrt{x^2+y^2}$ odcięta płaszczyznami $z = 1$, $z = 2$;

   c) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$, Σ - zewnętrzna strona powierzchni walca $x^2+y^2 = 1$ odcięta płaszczyznami $z = -2$, $z = 1$;

   d) $\vec{F}(x,y,z) = (x,y^2,z^3)$, Σ - zewnętrzna strona powierzchni sześcianu ograniczona płaszczyznami $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$;

   e) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2,y^2,z^2)$, Σ - zewnętrzna strona powierzchni kuli $x^2+y^2+z^2 = R^2$.

2. Za pomocą twierdzenia Gaussa obliczyć całki powierzchniowe ze wskazanych pól wektorowych po wskazanych płatach:

   a) $\vec{F}(x,y,z) = (2xy, -y^2, 2z)$, Σ - zewnętrzna części kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$ zawartej w pierwszym oktancie układu współrzędnych;

   b) $\vec{F}(x,y,z) = (x+z, x+y, y+z)$, Σ - zewnętrzna strona brzegu obszaru V: $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $x+y+z \leqslant 2R$, $z \geqslant 0$;

   c) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3,y^3,z^3)$, Σ - zewnętrzna strona powierzchni walca $x^2+y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

3. Korzystając z twierdzenia Stokesa obliczyć podane całki krzywoliniowe. Sprawdzić otrzymane wyniki obliczając te całki bezpośrednio:

   a) $\oint\limits_\Gamma x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, Γ: $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = \sin t + \cos t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$;

   b) $\oint\limits_\Gamma (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$, Γ - okrąg $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $x = y$;

   a) $\oint\limits_\Gamma x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz$, Γ - brzeg półsfery $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ przebiegany w stronę przeciwną do ruchu wskazówek zegara.

Odpowiedzi. 1. a) $3\pi/2$; b) -3π; c) 6π; d) 16; e) $8\pi R^3/3$.
2. a) 9π; b) πR^3; c) $\frac{R^2H}{2}(3R^2+2H^2)$.
3. a) $-\pi$.