Entropia

Tomasz Downarowicz
Instytut Matematyki i Informatyki
Politechnika Wrocławska

Hasło "entropia" występuje w termodynamice, teorii prawdopodobieństwa, teorii informacji, teorii układów dynamicznych (w której wyróżniamy teorię procesów stochastycznych, teorię ergodyczną i dynamikę topologiczną), a ponadto ma też ona swoje obiegowe, potoczne znaczenie. Postaram się dokonać przeglądu i porównania wszystkich tych znaczeń. Przy tym nacisk położony będzie na interpretację entropii jako miary chaosu czy też, jak kto woli, losowości.

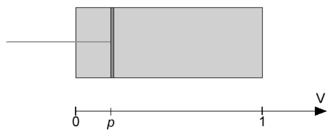
Pojęcie entropii stworzył niemiecki fizyk zajmujący się termodynamiką – Rudolf Clausius – w roku 1854. Wiąże się ona bezpośrednio ze sformułowaną wcześniej przez francuskiego inżyniera i fizyka Sadi Carnota II zasadą termodynamiki (która wtedy nie nosiła tego miana, ponieważ I zasada była sformułowana później). Najkrócej rzecz ujmując, zmiana entropii w elemencie objętości przy (nieskończenie małej) zmianie stanu jest równa stosunkowi zmiany zawartości ciepła do temperatury:

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}.$$

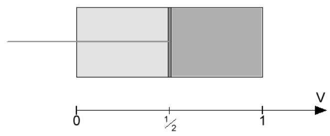
Zmiana entropii jest odpowiednią całką po przestrzeni i czasie. Pozwala to wyznaczyć entropię dowolnego układu z dokładnością do stałej uniwersalnej C. (Wyznaczenie tej stałej jest możliwe dzięki tzw. III zasadzie termodynamiki, my jednak pozwolimy sobie na jej wybór w sposób dla nas dogodny).

Najczęściej rozważa się gaz zamknięty w jakimś zbiorniku poddawany sprężaniu lub rozprężaniu i emitujący lub pobierający ciepło do otoczenia (lub kilka takich zbiorników). II zasada termodynamiki mówi, że entropia dowolnego układu zamkniętego (np. całego wszechświata) jest funkcją niemalejącą czasu. (Równoważna wersja: nie istnieje proces, którego jedynym rezultatem jest przekazanie ciepła ze zbiornika o temperaturze niższej do innego zbiornika o temperaturze wyższej). Zasada ta jest niezależna od zasady zachowania energii (czyli I zasady termodynamiki), ponieważ ta nie podaje żadnej zależności od czasu. Aby zilustrować znaczenie II zasady podamy prosty, choć tak naprawdę bardzo ogólny przykład.

Rozważmy wypełniony gazem zbiornik w kształcie zamkniętego cylindra z ruchomym (bez tarcia) tłokiem ustawionym w położeniu p. W chwili początkowej, po obu stronach tłoka panuje to samo ciśnienie P_0 i temperatura T_0, taka sama jak na zewnątrz. W takim stanie obecność i położenie tłoka jest z



stan A



stan B

punktu widzenia termodynamiki nieistotna i można równie dobrze uważać, że go nie ma, lub że znajduje się on na środku (jest to jedno z tych stwierdzeń fizyków, przy których matematycy odczuwają lekki niepokój). Oznaczmy ten stan przez A. Teraz powoli przesuwamy tłok na środek cylindra, pozwalając na całkowitą wymianę ciepła z otoczeniem przy stałej temperaturze. Ciśnienie po prawej stronie tłoka jest oczywiście większe niż po lewej (stan B).

W chwili, gdy tłok znajdował się w położeniu x, działała na niego siła proporcjonalna do różnicy ciśnień

$$F = c\left(P_0\frac{1-p}{1-x} - P_0\frac{p}{x}\right).$$

Zatem praca jaką wykonaliśmy wynosi

$$W = \int_p^{\frac{1}{2}} F\,dx = cP_0\big((1-p)\ln(1-p) + p\ln p + \ln 2\big).$$

Z zasady zachowania energii wynika, że praca ta jest równa zbilansowanemu ciepłu wyemitowanemu przez układ. Ponieważ wszystko to odbywało się w temperaturze stałej (po czasie i przestrzeni), zatem zmiana entropii wynosi

$$\Delta S = \frac{1}{T_0}\cdot cP_0\big(-(1-p)\ln(1-p) - p\ln p - \ln 2\big).$$

Załóżmy, że ciśnienie i temperaturę dobraliśmy tak, aby $\frac{1}{T_0}cP_0$ równało się jedności. Poprzez dobór stałej dowolnej C można zatem przyjąć, że entropia stanu początkowego A wynosi $S_{\frac{1}{2}} = \ln 2$ (bo ta nie zależy wartości parametru p), zaś stanu końcowego B

$$S_p = -(1-p)\ln(1-p) - p\ln p.$$

Oczywiście funkcja ta jest dodatnia parametru p i osiąga maksimum dla $p = \frac{1}{2}$. Jeśli teraz zaizolujemy nasz układ i zwolnimy tłok, to układ wróci po pewnym czasie do stanu wyjściowego A, nie wymieniając energii z otoczeniem ani w postaci ciepła, ani pracy. Nastąpi jednak wymiana ciepła poprzez tłok, przy czym po różnych stronach tłoka będą panowały różne temperatury, skutkiem czego entropia na powrót wzrośnie (i wyniesie tyle co na początku, czyli $\ln 2$). Pokazuje to, że układ zamknięty przyjmuje samoistnie stan o najwyższej entropii.

Mimo, że nie przeczyłoby to zasadzie zachowania energii, układ bez ingerencji z zewnątrz nigdy nie przyjmie stanu o niższej entropii, np. stanu B.

Inny wybitny fizyk – Ludwig Boltzmann z Uniwersytetu Wiedeńskiego – działający w okresie poprzedniego przełomiu wieków, powiązał entropię z prawdopodobieństwem, co przydało ostatniej naszej obserwacji nowej interpretacji. Usuńmy tłok z naszego cylindra i obliczmy z jakim prawdopodobieństwem układ przyjąłby samorzutnie stan równoważny w sensie termodynamicznym ze stanem B. Zakładając, że w cylindrze znajduje się N błądzących niezależnie i z rozkładem jednostajnym cząstek, prawdopodobieństwo tego, że w lewej połówce znajdzie się ich pN (a w prawej reszta, czyli $(1-p)N$), wynosi

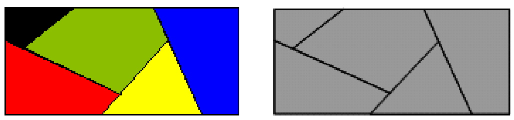
$$\mathsf{Prob}(A) = \frac{N!}{(pN)!((1-p)N)!}2^{-N}.$$

Przybliżając ze wzoru Stirlinga ($\ln n! \approx n \ln n - n$ dla dużych n) logarytm tego prawdopodobieństwa wynosi około

$$N\big(-(1-p)\ln(1-p) - p\ln p\big) - N\ln 2.$$

Przy czym liczba $N\ln 2$ to logarytm liczby 2^N „wszystkich” stanów, a $N\big(-(1-p)\ln(1-p) - p\ln p\big)$ (równa NS_p), to logarytm liczby stanów „sprzyjających” stanowi B. Widzimy przy tym, że dla $p = \frac{1}{2}$ liczba stanów sprzyjających równowadze w obu połówkach jest dla dużych N tak bliska liczbie wszystkich stanów, że prawdopodobieństwo takiej równowagi jest prawie 1, zaś przy $p \neq \frac{1}{2}$ prawdopodobieństwo to jest znikome. Oto sens II zasady termodynamiki: układ nie przyjmie samorzutnie stanu B, ponieważ jego prawdopodobieństwo jest bliskie zeru.

Z takich rozważań wywodzi się potoczne rozumienie entropii, jako rosnącej funkcji „prawdopodobieństwa” zajścia takiego, a nie innego zdarzenia. Utożsamia ją się z „miarą nieporządku” lub „chaosu”. Można to zilustrować następująco: podzielmy (w wyobraźni) przestrzeń cylindra wypełnionego gazem na kilka obszarów i „pomalujmy” cząsteczki w każdym z nich innym „kolorem”. Następnie



pozwólmy na swobodny ruch cząstek. Po pewnym czasie zaobserwujemy, że w każdej części cylindra występują te same proporcje kolorów. Prawdopodobieństwo powrotu do stanu wyjściowego jest pomijalnie małe. Można tę zasadę stosować do dyfuzji gazów, ale też do rozprzestrzeniania się gatunków zwierząt, chorób, czy nawet naszych rzeczy osobistych w obrębie mieszkania. Nieporządek narasta samorzutnie, a przywracanie porządku wymaga nakładu pracy (i wzrostu nieporządku gdzie indziej).

Mimo, że mówimy o znaczeniu potocznym entropii, jesteśmy bardzo blisko znacznie bardziej sformalizowanego (ale też bardziej ogólnego) pojęcia entropii w procesach stochastycznych. Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\alpha = (A_1, A_2, ..., A_k)$ skończonym rozbiciem mierzalnym przestrzeni X na zbiory (zdarzenia losowe) o prawdopodobieństwach $p_1, p_2, ..., p_k$. Funkcję informacji I_α rozbicia α definiujemy jako funkcję prostą na X przyjmującą na każdym zbiorze A_i wartość $-\ln p_i$. Interpretacja jest taka: im mniej prawdopodobne zdarzenie tym większa wartość informacji jeśli je zaobserwujemy. Przykład: nazwisko Nowak mniej dokładnie identyfikuje osobę niż np. nazwisko Morayne. Do pełnej identyfikacji Nowaka potrzebujemy dodatkowej informacji. Entropia rozbicia α jest zdefiniowana jako całka z funkcji informacji

$$H(\alpha) = -\sum_{i=1}^{k} p_i \ln p_i.$$

Podstawowe własności entropii są następujące: jest ona

- nieujemna;
- równa zeru tylko dla rozbicia trywialnego;
- przyjmująca dla rozbić na k zbiorów maksymalną wartość $\ln k$ dla rozbić na zbiory o jednakowych miarach (równych $\frac{1}{k}$).
- entropia połączenia rozbić stochastycznie niezależnych jest sumą ich entropii.

Można wykazać, że własności te determinują postać wzoru na entropię rozbicia.

Niech teraz $(X_n)_{n \geqslant 1}$ będzie stacjonarnym procesem stochastycznym określonym na przestrzeni Ω o wartościach w X i rozkładach jednowymiarowych μ. Dla zadanego rozbicia α zmienne $X_1, X_2, ..., X_N$ indukują rozbicie α^N przestrzeni Ω będące połączeniem odpowiednich przeciwobrazów rozbicia α. Jednym z podstawowych faktów teorii entropii w układach dynamicznych jest to, że ciąg entropii $H(\alpha^N)$ jest podaddytywny, zatem po podzieleniu przez N dąży do swojego infimum. Entropię procesu (X_n) względem rozbicia α definiujemy właśnie jako tę granicę:

$$h(\alpha) = \lim_{N \to \infty} \tfrac{1}{N} H(\alpha^N).$$

Wielkość tę można interpretować jako graniczny średni przyrost informacji uzyskanej w jednym kroku ewolucji. Zauważmy, że jeśli (X_n) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, to $h(\alpha) = H(\alpha)$. Wróćmy na chwilę do naszego przykładu. W stanie A wprowadziliśmy podział α cylindra na dwie części o prawdopodobieństwach p i $1-p$. Wrzucajmy teraz do tego cylindra niezależnie N cząstek, każdą z rozkładem jednostajnym. Jak wiemy, z prawdopodobieństwem bliskim jedności ułożą się one w proporcji pN i $(1-p)N$. Obliczyliśmy wcześniej, że logarytm liczby takich konfiguracji wynosi w przybliżeniu NS_p, czyli $NH(\alpha) = H(\alpha^N)$. Oczywiście wszystkich konfiguracji przy podziale na dwie części jest zawsze 2^N, ale jeśli nie są to równe połówki, to większość z nich będzie nieprawdopodobna (zatem podział taki wprowadza w naszym modelu stosunki ilościowe takie jakie obserwujemy w stanie B). Uzyskujemy wniosek, że $\exp(H(\alpha^N))$ to liczba kombinacji składająca się na nośnik prawie całego prawdopodobieństwa. Teza, którą właśnie sformułowaliśmy jest treścią jednego z najważniejszych twierdzeń o entropii, udowodnionego przez twórcę teorii informacji, Amerykanina Claude Shannona (1948), i udoskonalonego później kolejno przez B. McMillana (1953) i L. Breimana (1957). Twierdzenie to w pełnej ogólności mówi, że nie tylko liczby $\frac{1}{N}H(\alpha^N)$ (równe całce z jednej N-tej funkcji informacji dla α^N) dążą do entropii, ale że zbieżność ta zachodzi bez całki – prawie wszędzie:

$$\lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} I_{\alpha^N}(\omega) = h(\alpha) \quad \mu\text{-p.w.}$$

Innymi słowy, typowa klatka rozbicia α^N ma miarę w przybliżeniu równą $\exp(-Nh(\alpha))$. Praktyczne znaczenie tego twierdzenia polega na tym, że pozwala ono obliczać entropię w oparciu o jedną losowo wybraną trajektorię. Twierdzenie to nie wymaga (bardzo mocnego) założenia o niezależności, trzeba jedynie założyć tzw. ergodyczność procesu, tzn. że przestrzeń Ω nie jest istotną sumą zbiorów, na których proces ewoluuje rozłącznie.

Następnym krokiem w definiowaniu entropii procesu jest pozbycie się ustalonego rozbicia α. Uzyskuje się to definiując entropię procesu jako supremum po wszystkich rozbiciach skończonych entropii względem tych rozbić. Tak zdefiniowana wartość może być nieskończona. Jeśli jednak jest skończona, to istnieje rozbicie skończone α_0, które realizuje entropię, co więcej, cały proces jest izomorficzny z odpowiednim procesem o skończonej liczbie stanów k. Jest to treść twierdzenia Kriegera o generatorach z roku 1970.

A zatem, w przypadku entropii skończonej, przestrzeń Ω utożsamić można ze zbiorem wszystkich ciągów nad alfabetem k-elementowym (trajektorie procesu). Proces stochastyczny można interpretować jako miarę na trajektoriach, a stacjonarność procesu jest równoważna niezmienniczości miary na przesunięcie indeksowania trajektorii, czyli tak zwany *shift*. Odpowiednik ciągu niezależnych zmiennych losowych nosi teraz nazwę układu Bernoulli'ego. Najbardziej spektakularnym wynikiem ilustrującym znaczenie entropii jako niezmiennika izomorfizmu między układami dynamicznymi jest słynne twierdzenie Donalda Ornsteina z roku 1970, mówiące, że dwa układy Bernoulli'ego są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy mają równe entropie.

Z punktu widzenia zastosowań, najważniejszych interpretacji entropii dostarcza teoria informacji. Załóżmy, że ktoś (lub coś) wysyła do nas informację w postaci ciągu znaków ze skończonego (o k elementach) alfabetu (na przykład odbieramy bardzo długi telegram, najlepiej zaszyfrowany). To co w teorii procesów nazywa się „trajektorią”, w teorii informacji nazywa się „sygnałem”, a „proces” przemianowany jest na „źródło”. Zakładamy, że odbierany sygnał jest „typowy” dla danego źródła, co znaczy, że mamy do czynienia z trajektorią procesu pochodzącą ze zbioru pełnej miary, o którym mówi twierdzenie Shannona–McMillana–

Breimana. Czymże objawia się zatem entropia źródła (sygnału)? Będzie to parametr mówiący coś o sposobie pojawiania się bardzo długich sekwencji. Mianowicie, jeśli utworzymy listę wszystkich sekwencji długości N (jest ich k^N), i każdemu z nich przypiszemy jego frekwencję pojawień, to entropia powie nam jak bardzo taki rozkład różni się o rozkładu równomiernego $(\frac{1}{k^N}, \frac{1}{k^N}, ..., \frac{1}{k^N})$. Gdyby entropia była maksymalna ($\ln k$) oznaczałoby to, że obserwujemy sygnał całkowicie losowy, (czyli nie do rozszyfrowania). Entropia zero natomiast wskazuje na ubóstwo języka, (na przykład powtarzane jest w kółko to samo). W przypadkach pośrednich entropia mówi nam zatem o stopniu losowości czy też nieprzewidywalności sygnału. Przykład z życia: przemówienie działacza partyjnego ma tym większą entropię im częściej nie wiemy, jak potoczy się dalej jego wywód. Przy małej entropii przez większość czasu możemy z łatwością zgadnąć co będzie powiedziane dalej.

Entropia interpretowana jako zawartość informacji ma niezmiernie ważne zastosowania. Oto inny przykład: Wyobraźmy sobie plik komputerowy x w postaci bardzo długiego (o długości n) ciągu o skończenie wielu wartościach, dla ułatwienia dwóch: 0 i 1. Podzielmy go na kawałki równej długości N (tzw. słowa; zakładamy, że n jest wielokrotnością N, $n = mN$). Możemy uważać, że mamy do czynienia z ciągiem $\bar{x}$ długości m o symbolach w zbiorze $\mathcal{B}$ wszystkich słów B długości N. Każdemu z tych słów przypisujemy jego częstość pojawień $p(B)$, czyli liczbę wystąpień w $\bar{x}$ podzieloną przez m. Entropia takiego ciągu (a właściwie jej przybliżenie związane z parametrem N) wynosi oczywiście

$$h(x) = -\frac{1}{N} \sum_{B \in \mathcal{B}} p(B) \log_2 p(B)$$

(w teorii informacji wygodniej jest używać $\log_2$, jest to oczywiście tylko kwestia czynnika normującego: teraz maksymalna entropia (rozkładu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) wynosi nie $\log 2$, tylko $\log_2 2 = 1$). Wykażemy, że istnieje algorytm kompresji danych pozwalający w sposób wzajemnie jednoznaczny odwzorować wszystkie ciągi długości n na ciągi binarne w taki sposób, by długość obrazu każdego ciągu x wynosiła około $nh(x)$. Wyniknie stąd kolejna interpretacja entropii – jako parametru opisującego *stopień możliwej kompresji*. Najpierw zauważmy, że lepszej kompresji danych nie można się spodziewać, gdyż wszystkich ciągów x o długości n i ustalonej entropii h jest, jak już wiemy, około 2^{nh}, tyle samo co wszystkich ciągów binarnych o długości nh. Zatem ciągów binarnych o mniejszej długości po prostu by nam zabrakło do zakodowania różnowartościowego. Ale ciągów o długości mniejszej lub równej nh nam wystarczy! Najprostszy algorytm może być następujący: po jednej stronie wypisujemy wszystkie ciągi x długości n porządkując je niemalejąco według entropii, obok wypisujemy wszystkie możliwe słowa binarne porządkując je niemalejąco według długości. Każdemu ciągowi x przyporządkowujemy jego sąsiada, aż do wyczerpania ciągów x. Nie będę prezentował szczegółów oszacowań, ale takie przyporządkowanie spełnia nasze wymagania. Musimy sobie zdawać sprawę, że w ogólnym rozrachunku nie dokonaliśmy prawie żadnej kompresji danych. Przytłaczająca większość ciągów x ma bowiem maksymalną entropię 1, a takie nie uległy żadnej kompresji (współczynnik skrócenia wyniósł dla nich 1). Smaczek tkwi jednak w tym, że cała ta masa ciągów jest prawie zupełnie bezużyteczna jako pliki komputerowe (nie skompresowane). W praktyce pliki mają dużo wyższy stopień zorganizowania, czyli znacznie mniejszą entropię, a te podlegają istotnej kompresji. (Po kompresji stają się plikami krótszymi, ale na ogół już o maksymalnej entropii – gdyby nie, można byłoby je kompresować drugi raz).

Na zakończenie części dotyczącej entropii teorio-miarowej przytoczę jeszcze jedno przepiękne twierdzenie o czasie powrotu, które zacytuję w wersji podanej przez Ornsteina i Weissa w roku 1993. Jeśli obserwujemy proces o entropii h to prawie każda (w sensie prawdopodobieństwa) trajektoria x spełnia dla dużych N następujący warunek: początkowe słowo długości N powtórzy się po raz pierwszy po czasie równym w przybliżeniu $\exp(Nh)$. Jest to, dla zjawisk zachodzących w rzeczywistości, liczba niewyobrażalnie wielka (w przykładzie z gazem liczba N cząstek jest już bardzo duża, a co dopiero, gdy użyjemy jej w wykładniku). Wyjaśnia to słynny paradoks polegający na sprzeczności II zasady termodynamiki z podstawowym twierdzeniem teorii ergodycznej – twierdzeniem Poincaré o powracaniu. Według tego twierdzenia układ izolowany powróci kiedyś samorzutnie do stanu bardzo zbliżonego do stanu początkowego (w tym też takiego o małej entropii – wystarczy od takiego zacząć). Byłoby to sprzeczne z II zasadą termodynamiki mówiącej, że entropia powinna bezpowrotnie wzrosnąć. Wyjaśnienie tego paradoksu jest następujące: Żaden układ fizyczny nie jest tak naprawdę izolowany, w związku z tym nie realizuje on procesu idealnie stacjonarnego. Natomiast w procesie o dodatniej entropii moment teoretycznego powrotu układu do stanu początkowego jest tak odległy w czasie, że ewolucja zdąży już odchylić się od teoretycznej na tyle, że między stanem faktycznym a teoretycznym nie będzie już wtedy żadnego podobieństwa. Czyli twierdzenie Poincaré nie stosuje się do złożonych układów fizycznych (natomiast pozostaje w mocy II zasada termodynamiki).

Inną dziedziną układów dynamicznych, gdzie pojawia się entropia jest dynamika topologiczna. Zamiast przestrzeni probabilistycznej rozważa się tu przestrzeń topologiczną X (najczęściej metryczną i zwartą) i zadaną na niej transformację ciągłą T. W definicji entropii rozbicia zastępuje się przez minimalne pokrycia otwarte $\mathcal{A}$ (czyli takie, z których nie można wybrać istotnych podpokryć), z braku ustalonej miary wszystkie elementy takiego pokrycia traktuje się jako „jednakowo prawdopodobne”, stąd

$$H_{\mathsf{top}}(\mathcal{A}) = \ln(\#\mathcal{A}).$$

Entropia $h(T, \mathcal{A})$ transformacji T względem pokrycia $\mathcal{A}$ jest określona jako granica jednej N-tej powyższych entropii obliczonych dla pokryć $\mathcal{A}^N$ zdefiniowanych jako podpokrycia minimalne odpowiednich połączeń pokryć. Entropia topologiczna transformacji T jest równa supremum entropii po wszystkich pokryciach otwartych:

$$h_{\mathsf{top}}(T) = \sup_{\mathcal{A}} h(T, \mathcal{A}).$$

Topologiczne układy dynamiczne są tylko z pozoru uboższe od procesów stochastycznych, czy transformacji zachowujących miarę. Z klasycznych twierdzeń o punkcie stałym wynika bowiem, że w każdym takim układzie (zwartym) zbiór borelowskich miar niezmienniczych jest niepusty (ponadto jest on wypukły i ma jeszcze inne ważne własności). Możemy zatem nasz układ traktować jako układ z co najmniej jedną, a najczęściej wieloma miarami niezmienniczymi naraz. Każda z tych miar ma w tym układzie swoją własną entropię miarową. W tym sensie układ topologiczny może okazać się znacznie bogatszy od miarowego. Najważniejsze chyba twierdzenie dotyczące entropii topologicznej nosi nazwę zasady wariacyjnej (Goodwyn, Goodman, 1969) i mówi, że entropia topologiczna jest równa supremum po wszystkich miarach niezmienniczych entropii tych miar. W szczególności, jeśli układ topologiczny ma tylko jedną miarę niezmienniczą, to pojęcia entropii topologicznej i miarowej są równoważne.

Ogólnie entropia topologiczna jest parametrem bardziej „zgrubnym” niż entropia miarowa, jednak w niektórych sytuacjach pozwala się stosunkowo łatwo obliczyć. Na przykład w układach symbolicznych, czyli takich, gdzie przestrzenią X jest pewien domknięty i niezmienniczy na *shift* zbiór ciągów o skończenie wielu symbolach, a transformacją tenże *shift*, entropia topologiczna wyraża się jako granica z jednej N-tej logarytmu mocy rodziny $\mathcal{B}_N$ wszystkich bloków długości N występujących (choćby raz) w całym układzie.

W dynamice topologicznej ważnym pojęciem jest zjawisko zwane chaosem (w sensie Li–Yorke'a). Definiuje się go jako istnienie nieprzeliczalnego podzbioru w X, z którego każda para punktów ma tę własność, że w procesie ewolucji bywają one nieskończenie wiele razy dowolnie blisko siebie i zarazem nieskończenie wiele razy daleko od siebie. Związek entropii topologicznej z tak zdefiniowanym chaosem był badany od dość dawna. Znane są przykłady układów chaotycznych o entropii zero, co oznacza, że istnieje rodzaj losowości nie wyczuwalny przez entropię. Pytanie o implikację przeciwną było przez długi czas otwarte. Rozwiązali je w roku 2001 Blanchard, Glasner, Kolyada i Maas: dodatnia entropia topologiczna zawsze implikuje chaos Li–Yorke'a.

Wspomniane wcześniej twierdzenie Kriegera mówi, że każdy proces stacjonarny o entropii skończonej jest izomorficzny (w sensie miarowym) z układem symbolicznym (z pewną miarą niezmienniczą na shift). Spytajmy, czy podobne twierdzenie można sformułować dla układów topologicznych: czy każdy układ topologiczny o entropii topologicznej skończonej jest topologicznie sprzężony z układem symbolicznym (tym razem izomorfizm układów miałby być jednocześnie homeomorfizmem przestrzeni)? Oczywiście nie. Każdy układ symboliczny spełnia dwa warunki, które są niezmiennikami topologicznego sprzężenia: przestrzeń jest całkowicie niespójna, a transformacja jest ekspansywna (dwa różne punkty znajdą się kiedyś w odległości 1). Każdy układ sprzężony z symbolicznym musi oba te warunki spełniać, a żaden z nich nie wynika ze skończoności entropii. (Nawiasem mówiąc G.A. Hedlund udowodnił już w latach pięćdziesiątych, że zestaw tych dwóch warunków jest już równoważny istnieniu sprzężonego układu symbolicznego). Istnieje jednak możliwość rozszerzania układu do układu symbolicznego i wymienione warunki nie są do tego konieczne. Przez jakiś czas istniała hipoteza, że każdy układ topologiczny o skończonej entropii można topologicznie rozszerzyć do układu symbolicznego. Hipotezę tę obalił kilka lat temu Amerykanin Mike Boyle, konstruując odpowiedni kontrprzykład. Otworzyło się wiele pytań dotyczących tego, jak zmierzyć entropię możliwych rozszerzeń symbolicznych nie znając ich. Badaniem tego typu zagadnień zajmowałem się w ostatnich latach wspólnie z M. Boylem i doprowadziło to do pojęcia nowego niezmiennika topologicznego zwanego *entropią rozszerzeniową symboliczną*. Aby określić tę wielkość potrzeba narzędzia, jakim jest nowa teoria tzw. *struktur entropijnych* opisujących w jaki sposób entropia obserwowalna przy różnych rozdzielczościach rozmieszczona jest na zbiorze miar niezmienniczych. Dalsze szczegóły tej teorii wykraczają znacznie poza ramy tego opracowania.

Opracowano a bazie wykładu wygłoszonego na
Szkole Matematyki Poglądowej
Grzegorzewice, 2001

Instytut Matematyki i Informatyki, Politechnika Wrocławska
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
e-mail: downar@pwr.wroc.pl